中国精算师资格考试用书

寿险精算数学

主编 卢仿先 张 琳

中国财政经济出版社



中国精算师资格考试用书

寿险精算数学

修订版主编　卢仿先　张　琳
原书主编　曾庆五　卢仿先
审　　稿　高洪忠

中国财政经济出版社



图书在版编目（CIP）数据

寿险精算数学/卢仿先，张琳主编．—北京：中国财政经济出版社，2006.12
中国精算师资格考试用书
ISBN 7-5005-9421-6

Ⅰ．寿…　Ⅱ．①卢…②张…　Ⅲ．人寿保险-精算学-资格考核-自学参考资料
Ⅳ．F840.62

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 121415 号

中国财政经济出版社 出版
URL：http://www.cfeph.cn
E-mail：cfeph @ cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100036
发行处电话：88190406　财经书店电话：64033436
北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销
787×1092 毫米　16 开　19.75 印张　448 000 字
2006 年 12 月第 1 版　2006 年 12 月北京第 1 次印刷
印数：1—5 060　定价：39.00 元
ISBN 7-5005-9421-6/F·8175
（图书出现印装问题，本社负责调换）



中国精算师资格考试用书
编审委员会



总 序

1997年，由中国人民银行保险司牵头，开始筹划中国精算师资格考试体系的构建与考试教材的编写。当时中国寿险市场刚开始发展，市场只销售普通型产品，精算制度建设刚刚起步，在设计考试体系和考试内容时主要参考了北美、英国的资格考试体系。经过两年多的努力，2000年，中国精算师资格考试用书《利息理论》、《寿险精算数学》、《生命表的构造理论》、《风险理论与非寿险精算》和《寿险精算实务》陆续出版。1999年，中国保险监督管理委员会组织了中国首批精算师资格认证考试，其中有43名具有精算理论和实务背景的考生通过考试，获得了中国精算师资格。2000年12月，中国保监会组织了基于中国精算师资格考试体系的首次考试，中国精算师职业建设开始进入一个新的历史时期。

自2000年至今的6年中，中国精算师资格考试取得了长足的发展。到目前为止，已经设立了中国准精算师层次的全部9门考试和中国精算师层次的6门考试，在全国建立了15个考试中心，有13人通过考试获得中国精算师资格(共有56名中国精算师)，269人通过考试获得中国准精算师资格。在中国精算师职业发展的同时，中国的精算实践也取得了快速发展，以1999年发布《人身保险精算规定》为开端，在寿险业的共同努力下，中国保监会逐步建立了包括精算规定、精算责任人制度、精算报告、内含价值报告、生命表在内的较为完整的精算制度体系。这其中，在中国从事精算工作的精算人员起到了非常重要的作用。

随着中国保险业的发展以及精算师工作领域的不断扩展，参加中国精算师资格考试的人数不断增加，而第一版的考试用书在使用过程中逐渐发现了一些问题。因此，2005年开始启动修订计划。本次修订的教材包括《利息理论》、《寿险精算数学》、《风险理论》(将原书的风险理论部分独立出来)、《生命表基础》(原书名《生命表的构造理论》)和《寿险精算实务》。考试用书修订的宗旨是在不进行大的调整的基础上，对原考试用书进行完善，包括结构、内容、语句等，目的是给考生提供更为规范的考试用书。与此同时，中国保监会、中国保险行业协会精算工作委员会开始启动“中国精算师资格考试体系”研究课题，对考试体系、结构、内容进行深入研究，以中国精算理论与

实践为核心，结合国际精算理论与实践的发展，构建更为科学、全面的资格体系，这将是一项长期的系统工程。随着精算师工作领域的不断扩大，在精算师资格体系的建设过程中逐步突出精算在不同领域的应用，使精算师职业不断壮大。

本次修订得到了瑞士再保险公司和中国平安人寿保险股份有限公司的支持，在此表示感谢。

我们希望更多的有志之士投身于中国精算事业，也希望中国精算师职业的专业品质不断提高，为中国保险业、金融业以及中国社会保障的发展贡献力量。

中国精算师资格考试用书编审委员会

2006 年 7 月

前 言

本书旨在介绍寿险精算数学的基本理论。通过阅读本书，读者可以了解建立寿险经验生命表的基本方法和步骤；学会计算连续型和离散型寿险保单的趸缴纯保费及生存年金的精算现值；并在此基础上计算均衡纯保费。本书导出了各种情况下准备金的计算方法、总保费的计算、总保费准备金的计算和准备金的几种修正方法。讨论了在独立性假设下个体的联合生存状态和最后生存状态的相关精算变量及关系，还进一步探讨了在非独立情形下的分布规律，并引入了两个寿险生命参数模型，Frank's Copula 模型和 Common Shock 模型。介绍了多元风险模型与伴随单风险模型，推导了多元风险模型下的趸缴纯保费。最后介绍了在养老金计划中使用的精算方法。

本版是对2001年版寿险精算数学的修订，当时的版本是由卢仿先、曾庆五编著。本次修订由湖南大学金融学院风险管理与保险学系的6位老师完成。修订分工如下：第一章邓庆彪负责，第二、三章卢仿先负责，第四章尹莎负责，第五、六章张琳负责，第七章张宁负责，第八、九章王奕渲负责。最后由卢仿先和张琳统稿并做总体的校对。

本次修订在每章开始前都有每章主要内容和主要词汇，便于读者了解整章的结构和知识要点；增加了一些例题和大量的习题。为了便于读者自学，本书进行了少量的结构调整，使知识的引入更自然平滑，对原来知识引入有跳跃的地方进行了补充，并对原书出现的错误进行了更正。

湖南大学金融学院 卢仿先 张琳

2006年9月



目　　录



第一章

生存分布与生命表

本章主要内容：本章以零岁新生婴儿为例，引入死力的定义，通过新生婴儿的死亡年龄 X 和其在 x 岁时的未来寿命 $T(x)$ 来建立生存函数 $s(x)$ 和 ${}_tp_x$，并在此基础之上运用概率论的基本方法，对同分布的某组新生婴儿确定生命表的各主要函数，建立寿险业的经验生命表。生命表既是寿险保单定价的重要因素之一，也是寿险业务经营和政府实施监督与管理的一项基础工作。

本章主要词汇：死亡年龄　未来寿命　生存函数　死力　均匀分布　生命表

§1.1　死亡年龄的概率分布函数

寿险保单的保险金给付是以被保险人的生存或死亡为前提条件的，所以，被保险人在投保时的未来寿命是建立寿险精算数学模型的重要因素之一。为此，本节主要讨论死亡年龄的概率分布。

1.1.1　连续型的死亡年龄概率分布

对于某一个刚出生的婴儿来说，其死亡年龄 X 是一个连续型的随机变量，用 $F(x)$ 表示这个随机变量 X 的分布函数，则：

$$F(x) = Pr(X \leqslant x) \quad (x \geqslant 0) \tag{1.1.1}$$

这里，通常假设 $F(0) = 0$。

假设随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 是可导的，并用 $f(x)$ 表示随机变量 X 的概率密度

函数，则：

$$f(x)=F'(x)\quad(x\geqslant 0)$$

或

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt \tag{1.1.2}$$

而且其均值与方差分别是：

$$E(X)=\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$$

$$Var(X)=\int_0^{+\infty}(x-E(X))^2 f(x)\,dx$$

$$=E(X^2)-(E(X))^2 \tag{1.1.3}$$

1.1.2 离散型的死亡年龄概率分布

若将某一个新生婴儿的死亡年龄 X 取整数值(即取周岁数)并用字母 K 表示，则 $K=[X]$(其中，[ ]是取整函数)。那么，离散型随机变量 K 的概率分布律可表述为：

死亡年龄(K)	0	1	2	3	…
概　　率(q)	q_0	q_1	q_2	q_3	…

其中 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i=1$，$q_i\geqslant 0(i=0,1,2\cdots)$。

而且其分布函数、均值和方差分别是：

$$F(k)=\sum_{i\leqslant k} q_i\quad(i\geqslant 0)$$

$$E(K)=\sum_{i=0}^{\infty} iq_i$$

$$Var(K)=\sum_{i=0}^{\infty}(i-E(K))^2 q_i$$

$$=E(K^2)-(E(K))^2$$

§1.2 生存分布

我们从概率的角度来考察某一新生婴儿群体的生存分布情况。

1.2.1 生存函数

假设某一新生婴儿群体的死亡年龄 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $s(x)=1-F(x)$称为该新生婴儿的生存函数，即：

$$s(x)=Pr(X>x)\quad(x\geqslant 0) \tag{1.2.1}$$

式(1.2.1)表示该新生婴儿能活到 x 岁(即 x 岁以后死亡)的概率。

由于我们通常假设 $F(0)=0$，则 $s(0)=1$，其实际意义是，我们所讨论的新生婴儿是以 100% 的概率保证在出生时是生存的。

对于任意确定的 x，函数 $F(x)$ 与 $s(x)$ 都可以描述新生婴儿能活到 x 岁的概率。在概率论与统计学中，人们习惯采用死亡年龄的分布函数 $F(x)$ 来描述；而在精算学和人口统计学中，则习惯采用生存函数 $s(x)$ 来描述。

从死亡年龄的分布函数 $F(x)$ 的性质，可以推导出生存函数 $s(x)$ 的一些直观性质：

① $s(0)=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty} s(x)=0$；

② $s(x)$ 是单调递减的函数；

③ $s(x)$ 是一个右连续的函数。

关于生存函数 $s(x)$ 的一般图形，可用图 1－1 表示。

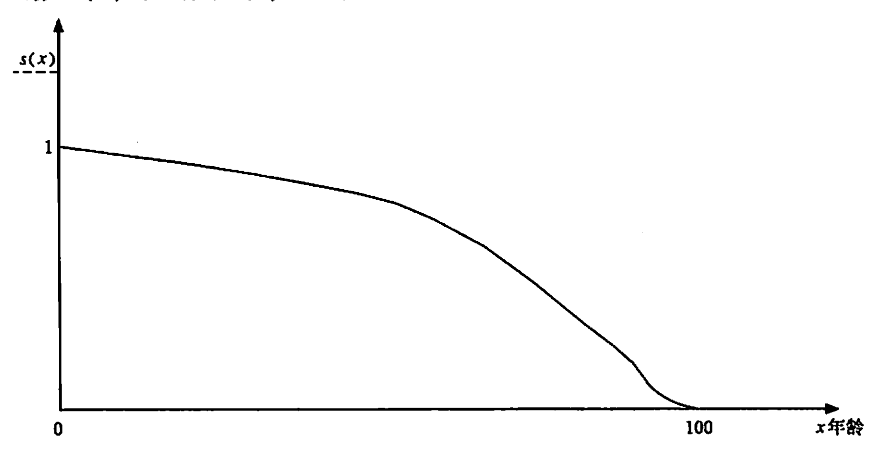


图 1－1

人的寿命是有限的，通常人的寿命不会超过某一特定年龄。也就是说，存在一个正数 ω，当 $x<\omega$ 时，$s(x)>0$；当 $x\geqslant\omega$ 时，$s(x)=0$。这时，称正数 ω 为极限年龄。如从图 1－1 中的曲线表示可以看出，极限年龄 ω 是 100 岁。

例如，某一个新生婴儿服从生存函数：

$$s(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{105} & (0\leqslant x<105)\\ 0 & (x\geqslant 105)\end{cases}$$

读者不难看出，生存者的极限年龄是 $\omega=105$ 岁。

根据概率原理，新生婴儿在年龄 x 岁与 $z(x<z)$ 岁之间死亡的概率是：

$$\begin{aligned}Pr(x<X\leqslant z)&=F(z)-F(x)\\&=s(x)-s(z)\end{aligned}$$

类似地，新生婴儿在 x 岁时仍活着的条件下，于年龄 x 岁与 $z(x<z)$ 岁之间死亡的条件概率是：

$$\begin{aligned}Pr(x<X\leqslant z\mid X>x)&=\frac{Pr(x<X\leqslant z)}{Pr(X>x)}\\&=\frac{s(x)-s(z)}{s(x)}\end{aligned}\qquad(1.2.2)$$

$$= 1 - \frac{s(z)}{s(x)}$$

一般地，新生婴儿在 x 岁时仍生存的条件下，于年龄 y 岁与 $z(x \leqslant y < z)$ 岁之间死亡的条件概率是：

$$Pr(y < X \leqslant z \mid X > x) = \frac{Pr(y < X \leqslant z)}{Pr(X > x)}$$

$$= \frac{s(y) - s(z)}{s(x)} \tag{1.2.3}$$

为叙述方便起见，我们引入符号(x)表示年龄为 x 岁的人，X 表示某新生婴儿的死亡年龄，则该新生婴儿在 x 岁活着的条件下，未来仍生存的时间(或生存期)是 $X - x$，那么，$X - x$ 称为该新生婴儿在 x 岁时的未来寿命，简称(x)的未来寿命(或未来余命)，并用符号 $T(x)$表示。即该新生婴儿在 x 岁时仍生存的条件下，有 $T(x) = X - x$。

1.2.2 连续型未来寿命的生存分布

用概率来研究生存者的未来寿命 $T(x)$是精算学中的一项基本内容，而且还引用了一组国际通用的精算函数符号来描述随机变量 $T(x)$的概率分布。这些精算函数符号，在以后的章节中将陆续给予介绍。引入下列符号：

$${}_tq_x = Pr(T(x) \leqslant t) \quad (t \geqslant 0) \tag{1.2.4}$$

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = Pr(T(x) > t) \quad (t \geqslant 0) \tag{1.2.5}$$

符号${}_tq_x$ 描述为(x)将在未来 t 年内死亡的概率。${}_tq_x$ 是随机变量 $T(x)$的分布函数，而${}_tp_x$ 是关于 $T(x)$的生存函数，即表述(x)将在 $x + t$ 岁时仍生存的概率。

特别地，当 $x = 0$ 时，$T(0) = X$，即 0 岁新生儿的未来寿命就是刚出生婴儿的死亡年龄，且，

$${}_xp_0 = s(x) \quad (x \geqslant 0) \tag{1.2.6}$$

当 $t = 1$ 时，式(1.2.4)与式(1.2.5)所定义符号中的前缀允许省略，即${}_1q_x$ 与${}_1p_x$ 可简写为 q_x 与 p_x。q_x 表示(x)在未来一年内死亡的概率，p_x 表示(x)在 $x + 1$ 岁时仍生存的概率。

另外，我们用精算函数符号${}_{t|\mu}q_x$ 表示(x)在生存 t 年后，在 $x + t$ 岁与 $x + t + \mu$ 岁之间死亡的概率，即：

$$\begin{aligned} {}_{t|\mu}q_x &= Pr(t < T(x) \leqslant t + \mu) \\ &= {}_{t+\mu}q_x - {}_tq_x \\ &= {}_tp_x - {}_{t+\mu}p_x \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

特别地，当 $\mu = 1$ 时，符号${}_{t|1}q_x$ 可简写成${}_{t|}q_x$。

下面，我们考察精算函数符号${}_tq_x$、${}_tp_x$、${}_{t|\mu}q_x$ 与生存函数 $s(x)$之间的关系。

由于(x)的未来寿命 $T(x) = X - x$，隐含着新生婴儿在 x 岁时仍生存这一前提条件，所以事件$\{T(x) \leqslant t\}$与事件$\{0 \leqslant X - x \leqslant t \mid X > x\}$是同一事件，从而 $T(x)$的分布函数为：

$${}_tq_x = Pr(T(x) \leqslant t) = Pr(x < X \leqslant x + t \mid X > x)$$

运用式(1.2.2)，并且 $z = x + t$，则：

$${}_tq_x = 1 - \frac{s(x + t)}{s(x)} \tag{1.2.8}$$

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= 1 - {}_tq_x \\
&= \frac{s(x+t)}{s(x)}
\end{aligned} \tag{1.2.9}
$$

对于${}_{t|\mu}q_x$，运用式(1.2.7)、式(1.2.8)和式(1.2.9)，可得：

$$
\begin{aligned}
{}_{t|\mu}q_x &= Pr(t < T(x) \leqslant \mu + t) \\
&= {}_{t+\mu}q_x - {}_tq_x \\
&= \frac{s(x+t) - s(x+t+\mu)}{s(x)} \\
&= \frac{s(x+t)}{s(x)} \cdot \frac{s(x+t) - s(x+t+\mu)}{s(x+t)} \\
&= {}_tp_x \cdot {}_\mu q_{x+t}
\end{aligned} \tag{1.2.10}
$$

式(1.2.10)表明：(x)在$x+t$岁与$x+t+\mu$岁之间死亡的条件概率，等于(x)在$x+t$岁时仍生存的条件概率与$(x+t)$在以后的μ年内死亡的条件概率的乘积。

未来寿命$T(x)$的概率分布在人寿保险业务经营中具有重要的现实意义。这是因为死亡保险的保险金通常是在被保险人死亡时给付的，即死亡保险金是在被保险人于x岁投保后的$T(x)$处给付的。但是，在实际的业务运作过程中，从计算方法的角度来看其可操作性较差。为使这一现实性意义落到实处，我们有必要引入离散型未来寿命的概率分布。

1.2.3 离散型未来寿命的生存分布

设$K(x)$表示(x)未来寿命的周年数或(x)在未来生存的整年数，即$K(x) = [T(x)]$，即$K(x)$是$T(x)$的最大整数部分。例如，若$T(x) = 34.25$，则$K(x) = 34$；若$T(x) = 35.98$，则$K(x) = 35$。

根据$K(x)$的定义，则$K(x)$是取值于非负整数集上的一个随机变量，且对于任意非负整数k，$k \leqslant T(x) < k+1 \Leftrightarrow K(x) = k$，则随机变量$K(x)$的概率分布律可表示为：

$$Pr(K(x) = k) = Pr(k \leqslant T(x) < k+1) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

由于对连续型随机变量$T(x)$，有：

$$Pr(T(x) = k) = Pr(T(x) = k+1) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

故随机变量$K(x)$的概率分布律又可表示为：

$$
\begin{aligned}
Pr(K(x) = k) &= Pr(k < T(x) \leqslant k+1) \\
&= {}_{k+1}q_x - {}_kq_x = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x \\
&= {}_kp_x \cdot q_{x+k} = {}_{k|}q_x \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)
\end{aligned} \tag{1.2.11}
$$

在不易发生混淆的情况下，在以后的有关章节中，我们通常将符号$T(x)$简写成T，符号$K(x)$简写成K。

§1.3 死　　力

上一节我们所讨论的问题是(x)将在某一段时间内死亡的有关精算函数。本节我们所讨论的问题是：(x)将在某一瞬间内死亡的变化情况，即死力。



1.3.1 死力的定义及性质

所谓死力，是指在到达 x 岁的人中，在一瞬间里死亡的人所占的比率。死力也称瞬间死亡率或死亡密度，通常在 x 岁时的死力用符号 μ_x 表示，其基本关系式是：

$$\begin{aligned}\mu_x &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{s(x) - s(x+\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{s(x)} \\ &= -\frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{F'(x)}{1-F(x)} \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

死力也如同生存函数一样，可以用来确定随机变量 X 的分布。

由式(1.3.1)中可知 $\mu_x \geqslant 0$，将式(1.3.1)中的 x 改为 y，可得：

$$-\mu_y dy = \frac{ds(y)}{s(y)} = d[\ln s(y)]$$

对上式从 x 到 $x+t$ 进行积分，得：

$$\begin{aligned}-\int_x^{x+t} \mu_y dy &= \int_x^{x+t} d[\ln s(y)] \\ &= \ln\left(\frac{s(x+t)}{s(x)}\right) = \ln({}_tp_x)\end{aligned}$$

即

$${}_tp_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_y dy\right) \tag{1.3.2}$$

或

$${}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right) \tag{1.3.3}$$

特别地，当 $x=0, t=x$ 时，式(1.3.3)转化为：

$$s(x) = {}_xp_0 = \exp\left(-\int_0^x \mu_s ds\right) \tag{1.3.4}$$

从而随机变量 X 的分布函数与密度函数分别是：

$$F_X(x) = 1 - s(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \mu_s ds\right) \tag{1.3.5}$$

和

$$\begin{aligned}f_X(x) &= -s'(x) = \mu_x \cdot \exp\left(-\int_0^x \mu_s ds\right) \\ &= {}_xp_0 \cdot \mu_x \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

$T(x)$的分布函数与密度函数分别是：

$$F_T(t) = 1 - {}_tp_x = 1 - \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right) \tag{1.3.7}$$

和

$$f_T(t) = -\frac{d}{dt}({}_tp_x) = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \quad (t \geqslant 0) \tag{1.3.8}$$

[例 1.3.1] 设死力 $\mu_x = \dfrac{1}{1+x}$，$x \geqslant 0$。

试求：(1)随机变量 X 的分布函数与密度函数；

(2)随机变量 $T(x)$的分布函数与密度函数；

(3) $Pr(10 < X \leqslant 30)$；

(4) ${}_{5|15}q_{20}$。

解：(1) $F_X(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \dfrac{1}{1+s} ds\right)$

$$= 1 - \exp(-\ln(1+x))$$

$$= \frac{x}{1+x} \quad (x \geqslant 0)$$

$$f_X(x) = F'_X(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (x \geqslant 0)$$

(2) $F_T(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{1+x+s}ds\right)$

$$= 1 - \exp\left(-\ln\frac{1+x+t}{1+x}\right)$$

$$= \frac{t}{1+x+t} \quad (x \geqslant 0, t \geqslant 0)$$

$$f_T = F'_T(t) = \frac{1+x}{(1+x+t)^2} \quad (x \geqslant 0, t \geqslant 0)$$

(3) $Pr(10 < X \leqslant 30) = F(30) - F(10)$

$$= \frac{30}{1+30} - \frac{10}{1+10} \approx 0.05865$$

(4) ${}_{5|5}q_{20} = \frac{s(25) - s(30)}{s(20)} = \frac{F(30) - F(25)}{1 - F(20)}$

$$\approx 0.13027$$

死力具有如下性质：

① 当 $x \geqslant 0$ 时，$\mu_x \geqslant 0$；

② 对于任意 $x \geqslant 0$,都有 $\int_x^{+\infty} \mu_s ds = +\infty$；

③ μ_x 是死力，则 $\int_0^{+\infty} {}_tp_x \mu_{x+t} dt = 1$。

证：性质①、③显然成立。

至于性质②，由于 ${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)}$，且 $\lim\limits_{t \to \infty} s(x+t) = 0$

故
$$\lim_{t \to \infty} {}_tp_x = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{s(x)} \cdot s(x+t) = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} \ln {}_tp_x = -\infty$$

$$\int_x^{+\infty} \mu_s ds = \lim_{t \to \infty} \int_x^{x+t} \mu_s ds = \lim_{t \to \infty}(-\ln {}_tp_x) = +\infty$$

死力 μ_x 的一般图形如图 1-2 所示。

在精算学中，μ_x 称为死力；但在部件及系统的可靠性理论中，μ_x 又称为失效率或故障率。因此，μ_x 在理论研究中是一个很重要的函数。

本节关于死力 μ_x 与分布函数 $F(x)$、密度函数 $f(x)$、生存函数 $s(x)$之间的关系，可归纳为表 1-1。

从表 1-1 中可以看出，对于四个函数 $F(x)$、$f(x)$、$s(x)$、μ_x，只要已知其中的一个函数，就可以求出其中的另外三个函数。

1.3.2 死力的若干解析形式

下面,我们介绍四种常见的死力解析形式。解析式的名称都是以创建者的名字来命名的。

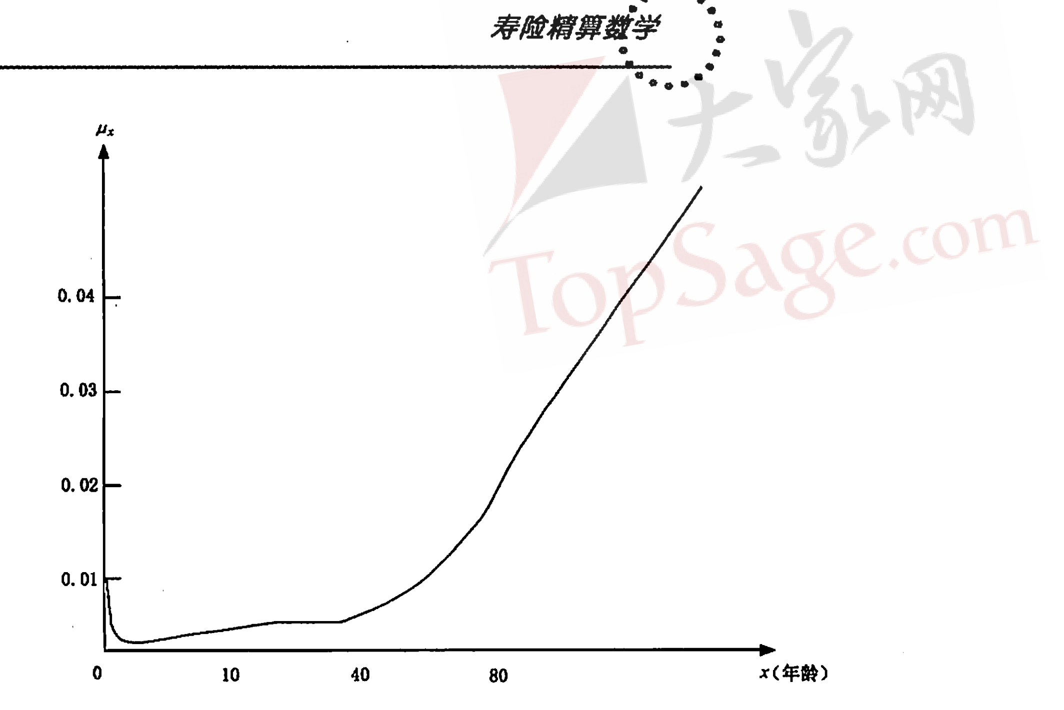


图 1-2 死力 μ_x 的一般图形

表 1-1 μ_x、$F(x)$、$f(x)$、$s(x)$之间的关系

	分布函数 $F(x)$	密度函数 $f(x)$	生存函数 $s(x)$	死力 μ_x
$F(x)$		$F'(x)$	$1-F(x)$	$\frac{F'(x)}{1-F(x)}$
$f(x)$	$\int_0^x f(t)dt$		$1-\int_0^x f(t)dt$	$\frac{f(x)}{1-\int_0^x f(t)dt}$
$s(x)$	$1-s(x)$	$-s'(x)$		$-\frac{s'(x)}{s(x)}$
μ_x	$1-\exp\left(-\int_0^x \mu_s ds\right)$	$\exp\left(-\int_0^x \mu_s ds\right)\cdot\mu_x$	$\exp\left(-\int_0^x \mu_s ds\right)$	

1. de Moivre 形式。

形式如下：

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}(0 \leqslant x < \omega) \tag{1.3.9}$$

其中，ω 是极限年龄。

式(1.3.9)是由 de Moivre 于 1729 年创建的。在 de Moivre 形式下，随机变量 X 的概率分布情况是：

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \frac{1}{\omega - t}dt\right)$$

$$= 1 - \exp\left(\ln\frac{\omega - x}{\omega}\right) = \frac{x}{\omega} \quad (0 \leqslant x \leqslant \omega)$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\omega} \quad (0 \leqslant x \leqslant \omega)$$

$$s(x)=1-F(x)=1-\frac{x}{\omega}\quad(0\leqslant x\leqslant\omega)$$

上述结果表明，在 de Moivre 形式下，死亡年龄 X 在$[0,\omega]$上服从均匀分布。

2. Gompertz 形式。

形式如下：

$$\mu_x=BC^x\quad(x\geqslant0)\qquad(1.3.10)$$

其中，$B>0,C\geqslant1$。

式(1.3.10)是由 Gompertz 在 1825 年创建的。在 Gompertz 形式下，随机变量 X 的分布情况是

$$F(x)=1-\exp\left(-\int_0^x BC^t dt\right)$$
$$=1-\exp[m(1-C^x)]\quad(x\geqslant0)$$

其中，$m=B/\ln C$。

$$s(x)=1-F(x)=\exp[m(1-C^x)]\quad(x\geqslant0)$$
$$f(x)=F'(x)=BC^x\exp[m(1-C^x)]\quad(x\geqslant0)$$

3. Makeham 形式。

形式如下：

$$\mu_x=A+BC^x\quad(x\geqslant0)\qquad(1.3.11)$$

其中，$B>0,C\geqslant1$，$A\geqslant-B$。

式(1.3.11)是由 Makeham 在 1860 年创建的。在 Makeham 形式下，随机变量 X 的分布情况是：

$$F(x)=1-\exp[-Ax-m(C^x-1)]\quad(x\geqslant0)$$
$$s(x)=\exp[-Ax-m(C^x-1)]\quad(x\geqslant0)$$
$$f(x)=(A+BC^x)\exp[-Ax-m(C^x-1)]\quad(x\geqslant0)$$

其中，$m=B/\ln C$。

特别地，当 $A=0$ 时，Makeham 形式简化为 Gompertz 形式，即式(1.3.11)是式(1.3.10)的推广。

4. Weibull 形式。

形式如下：

$$\mu_x=kx^n\quad(x\geqslant0)\qquad(1.3.12)$$

其中，$k>0,n>0$。

式(1.3.12)是由 Weibull 在 1939 年创建的。在 Weibull 形式下，随机变量 X 的分布情况是：

$$F(x)=1-\exp(-bx^{n+1})\quad(x\geqslant0)$$
$$s(x)=\exp(-bx^{n+1})\quad(x\geqslant0)$$
$$f(x)=kx^n\exp(-bx^{n+1})\quad(x\geqslant0)$$

其中，$b=k/(n+1)$。

以上四种形式的死力解析式 μ_x 与其对应的生存函数 $s(x)$归纳于表 1-2。

表 1－2　　四种死力解析形式以及与 μ_x 对应的生存函数 $s(x)$

	μ_x	$s(x)$	条件限制
de Moivre	$(\omega-x)^{-1}$	$1-\frac{x}{\omega}$	$0\leqslant x\leqslant\omega$
Gompertz	BC^x	$\exp\left[\frac{B}{\ln C}(1-C^x)\right]$	$B>0, C\geqslant 1, x\geqslant 0$
Makeham	$A+BC^x$	$\exp[-Ax+m(1-C^x)]$	$A\geqslant -B, B>0, C\geqslant 1, x\geqslant 0$
Weibull	kx^n	$\exp\left(-\frac{k}{n+1}x^{n+1}\right)$	$k>0, n>0, x\geqslant 0$

§1.4 生　命　表

生命表是描述人的寿命或(x)的未来寿命的概率分布的一种表示形式。它是寿险公司计算纯保险费的重要依据之一。正式生命表通常含有基本函数 q_x、l_x、d_x 的数值，并按各年龄排列成表格，如需要的话，还会增加某些衍生函数，如 L_x、T_x。在正式介绍生命表之前，有必要介绍生命表的一些函数。

1.4.1　生命表函数

由于生命表是通过某一特定数目的生存群体来反映的，因此，我们有必要从一组特定数目为 l_0 的零岁新生婴儿出发考虑生命表中的主要函数。

1. 生存人数(l_x)与死亡人数(d_x)。我们考虑一组数目为 l_0(例如 $l_0=100000$)的零岁新生婴儿群体，且这一组中每一个新生婴儿的死亡年龄的概率分布均可以由同一个生存函数 $s(x)$来描述(即同分布)。记 $L(x)$表示该组新生婴儿群体中能生存到 x 岁的总人数，则

$$L(x)=\sum_{j=1}^{l_0} I_j(x)$$

其中：

$$I_j(x)=\begin{cases}1 & \text{当第 } j \text{ 个新生婴儿在 } x \text{ 岁时仍活着(仍生存时)} \quad j=1,2,\cdots,l_0 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

根据假设，则

$$E(I_j(x))=1\cdot s(x)+0(1-s(x))=s(x)\quad (j=1,2,\cdots,l_0)$$

故

$$E[L(x)]=E\left(\sum_{j=1}^{l_0} I_j(x)\right)=\sum_{j=1}^{l_0} E(I_j(x))$$

$$=\sum_{j=1}^{l_0} s(x)=l_0 s(x)$$

记 $l_x = E[L(x)]$，则 $l_x = l_0 s(x)$，即 l_x 表示数目为 l_0 个零岁新生婴儿能活到 x 岁的期望人数。

类似地，用符号 ${}_nD_x$ 表示 l_0 个零岁新生婴儿在 x 岁与 $x+n$ 岁之间死亡人数的随机变量，每个零岁新生婴儿在 x 岁与 $x+n$ 岁之间死亡的概率是 $(s(x)-s(x+n))$。用 ${}_nd_x$ 表示 ${}_nD_x$ 的期望，有

$$\begin{aligned} {}_nd_x &= E({}_nD_x) = l_0[s(x)-s(x+n)] \\ &= l_x - l_{x+n} \end{aligned}$$

当 $n=1$ 时，${}_nd_x$ 简写成 d_x，则

$$d_x = l_x - l_{x+1} \quad (x=0,1,2,\cdots,\omega)$$

2. 生存人年数(L_x)与累积生存人年数(T_x)。生命表中年龄为 x 岁的生存人数 l_x 在一年(x 岁至 $x+1$ 岁)内的生存人年数，记作 L_x，即年龄为 x 岁的生存人数 l_x 自 x 岁至 $x+1$ 岁止生存人的年数，则

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t}dt \tag{1.4.1}$$

假设每个生存者的死亡年龄 X 在 $[x, x+1]$ 上服从均匀分布，则(读者可参考式(1.4.14)和(1.4.15))

$$l_{x+t} = l_x - td_x \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{1.4.2}$$

故

$$\begin{aligned} L_x &= \int_0^1 l_{x+t}dt = \int_0^1 (l_x - td_x)dt \\ &= l_x - \frac{1}{2}d_x = \frac{1}{2}(l_x + l_{x+1}) \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

生命表中自 x 岁以后各年龄的生存人年数的总和称为累积生存人年数，记作 T_x，则

$$T_x = L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + \cdots \tag{1.4.4}$$

或

$$T_x = \int_0^{+\infty} l_{x+t}dt \tag{1.4.5}$$

3. 平均余命

生命表中年龄达到 x 岁的人数 l_x，其以后生存的平均年数称为 x 岁时的完全平均余命，记作 $\dot{e}_x$，则

$$\dot{e}_x = \frac{T_x}{l_x} = \int_0^{+\infty} \frac{l_{x+t}}{l_x}dt = \int_0^{+\infty} {}_tp_x dt \tag{1.4.6}$$

对式(1.4.6)运用分部积分法，得

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= (t \cdot {}_tp_x)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt \\ &= E[T(x)] \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

特别地，零岁时的完全平均余命 $\dot{e}_0$ 就是零岁组群体的平均预期寿命。

据资料统计，1981 年我国零岁群体的平均预期寿命为 67.68 岁，其中，男性为 66.43 岁，女性为 69.35 岁。到了 1990 年，零岁群体的平均预期寿命提高到 69.19 岁，其中，男性为 67.58 岁，女性为 70.91 岁。但是，我国地域辽阔，各地区经济发展、自然条件、生活水平和生活习惯等方面的差异很大，加之有严格的户籍管理制度，导致人口流动性差，从而各区域之间平均预期寿命的差异性也很大(见表 1－3)

表 1－3　　全国各地区平均预期寿命表(1990 年)

省(市、自治区)	北京	天津	河北	山西	内蒙古	辽宁	吉林	黑龙江	上海	江苏
$\mathring{e}_x$	72.03	71.07	70.65	67.95	67.04	70.80	69.03	68.35	73.01	69.64
省(市、自治区)	浙江	安徽	福建	江西	山东	河南	湖北	湖南	广东	广西
$\mathring{e}_x$	69.71	69.33	68.61	66.28	70.23	69.81	65.85	65.76	71.17	69.92
省(市、自治区)	四川	贵州	云南	陕西	甘肃	青海	宁夏	新疆		
$\mathring{e}_x$	64.33	61.94	61.45	65.24	66.09	61.58	65.91	61.29		

资料来源：山水《寿命与寿险》国际市场 1996 年第二期。

从表 1－3 中的数字可看出，最高的平均预期寿命 73.01 岁(上海)比最低的平均预期寿命 61.29 岁(新疆)高出 11.72 岁。

表 1－4 给出了世界主要国家(或地区)在某些年龄的完全平均余命。

表 1－4　　世界主要国家(或地区)的平均余命(＊为编算时间)

国家或地区 \ 年龄		0	5	10	20	30	40	50	60	70	
瑞典	男	71.97	68.03	63.17	53.53	44.10	34.73	25.82	17.68	10.87	1972*
	女	77.41	73.23	68.3	58.51	48.73	39.16	29.85	21.06	13.13	
丹麦	男	70.70	67.20	62.40	52.80	43.30	33.80	25.00	17.10	10.80	1971*
	女	75.90	72.10	67.20	57.40	47.70	38.10	29.10	20.60	13.10	
日本	男	70.177	66.46	61.65	52.05	42.66	33.42	24.60	16.57	10.07	1971*
	女	75.58	71.67	66.79	56.99	47.37	37.85	28.64	19.97	12.40	
加拿大	男	69.34	66.02	61.17	51.71	42.50	33.22	24.52	16.35	10.90	1972*
	女	76.36	72.79	67.91	58.18	48.51	38.99	29.86	21.39	13.85	
英国	男	68.80	65.40	60.50	50.90	41.30	31.80	22.90	15.20	9.40	1971*
	女	75.10	71.40	66.50	56.70	47.00	37.40	28.30	19.80	12.50	
法国	男	68.50	64.80	60.00	50.50	41.20	32.10	23.60	16.20	10.601	1971*
	女	76.10	72.30	67.40	50.50	48.00	38.50	29.40	20.90	13.10	
美国	男	67.40	64.10	59.20	49.80	40.80	31.70	23.30	16.10	10.60	1971*
	女	74.80	71.30	66.80	56.70	47.10	37.70	28.90	20.61	13.40	
西德	男	67.25	64.36	59.55	50.08	40.84	31.60	22.87	15.13	9.27	1971*
	女	73.56	70.32	65.46	55.72	46.05	36.53	27.44	18.92	11.49	
前苏联	男	65.89	66.16	61.32	51.66	41.20	32.10	23.60	16.20	10.20	1971*
	女	74.21	70.19	65.31	55.54	48.00	38.50	29.40	20.90	13.10	

续表

年龄 国家或地区		0	5	10	20	30	40	50	60	70	
中国台湾省	男	66.75	63.63	58.85	49.34	40.18	31.21	22.64	15.18	9.30	1971*
	女	71.57	68.34	63.50	53.83	44.32	35.03	26.15	17.98	11.05	
科威特	男	66.14	65.34	60.85	51.42	42.18	33.33	24.66	17.23	11.91	1970*
	女	71.82	71.02	66.36	56.81	47.14	37.78	28.64	20.08	12.98	
新加坡	男	65.10	62.00	57.10	47.50	38.20	28.80	20.20	12.90	7.10	1970*
	女	70.00	66.60	61.80	52.00	42.40	32.90	23.90	15.60	8.20	
巴拿马	男	65.26	65.43	59.91	50.79	42.13	33.43	24.94	17.03	10.25	1970*
	女	67.50	67.26	62.72	53.56	44.86	36.14	27.69	19.93	13.06	
葡萄牙	男	63.69	63.27	58.61	49.21	40.05	31.07	22.64	15.06	8.85	1971*
	女	70.27	69.35	65.61	54.90	45.34	35.95	26.85	18.29	10.80	
韩国	男	63.00	63.00	58.00	49.00	40.00	31.00	23.00	16.00	10.00	1970*
	女	66.00	66.00	61.00	52.00	43.00	34.00	25.00	17.00	11.00	
智利	男	60.48	61.43	56.72	47.32	38.46	29.99	22.29	15.47	10.17	1970*
	女	66.01	66.96	62.20	52.67	43.41	34.45	25.89	18.05	11.64	
巴西	男	57.61	60.65	56.16	47.02	38.46	30.01	22.06	15.04	9.31	1970*
	女	61.10	63.39	58.88	49.71	41.03	32.52	24.24	16.61	10.17	
肯尼亚	男	46.90	53.80	51.00	43.00	35.70	28.30	21.10	14.50	9.10	1969*
	女	51.20	57.10	54.10	45.70	38.10	30.30	22.70	15.70	9.80	

资料来源：李铭，《寿险数学》，台湾远东图书公司印行，1986年。

4. 平均生存函数。

(x)在 x 岁与 $x+1$ 之间，死亡者在这一年中的平均生存年数 $\alpha(x)$，其定义是

$$\alpha(x)=\frac{\int_0^1 t l_{x+t}\mu_{x+t}dt}{\int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t}dt}$$

根据式(1.4.1)，容易得到

$$\alpha(x)=\frac{L_x-l_{x+1}}{l_x-l_{x+1}}$$

或
$$L_x=\alpha(x)l_x+[1-\alpha(x)]l_{x+1}$$

类似于式(1.4.7)的含义，记 $e_x=E[K(x)]$，则称 e_x 为在 x 岁时的简约平均余命。事实上

$$e_x=E[K(x)]=\sum_{k\geq 0}k({}_kp_x-{}_{k+1}p_x)=\sum_{k\geq 0}k\cdot{}_{k|}q_x$$

1.4.2 生命表各函数之间的关系

前面介绍了(x)将在 t 年内死亡的条件概率函数以及(x)在 $x+t$ 岁时仍生存的条件概

率函数，即

$$ {}_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} $$

$$ {}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} $$

下面，我们引入生命表中的 l_x 与 d_x 的表达式，则

$$ {}_tq_x = 1 - \frac{l_0 s(x+t)}{l_0 s(x)} = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} $$

$$ = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} = \frac{{}_td_x}{l_x} \tag{1.4.8} $$

同理可得

$$ {}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} \quad (t>0) \tag{1.4.9} $$

$$ e_x = E[K(x)] = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \cdots}{l_x} $$

特别地，当 $t=1$ 时，则

$$ q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \tag{1.4.10} $$

$$ p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \tag{1.4.11} $$

由式(1.3.4)可知，生存人数 l_x 也可通过死力 μ_x 来描述，即

$$ l_x = l_0 \cdot s(x) = l_0 \cdot \exp\left(-\int_0^x \mu_t dt\right) \tag{1.4.12} $$

$$ d_x = l_x - l_{x+1} = \int_x^{x+1} l_s \mu_s ds \tag{1.4.13} $$

1.4.3 关于尾龄的若干种假设

上面我们介绍了生命表中的各种函数，且这些函数均属连续型，而生命表描述死亡年龄分布的常规方式是离散型的，因此，对连续型死亡年龄的尾龄需要作出某种假设，并在该假设下，将其离散化，转化为生命表中分布的整数死亡年龄来表述。

1. 死亡均匀分布假设。死亡均匀分布假设，有时也称 *UDD* 假设，即若生存函数 $s(x)$ 满足如下关系式

$$ s(x+t) = (1-t)s(x) + t \cdot s(x+1) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{1.4.14} $$

则称 (x) 在 $[x, x+1]$ 上死亡服从均匀分布，简称死亡均匀分布。

在死亡均匀分布假设下，运用式(1.4.14)可得

$$ \left. \begin{aligned} & l_{x+t} = l_x - td_x \\ & {}_tq_x = t \cdot q_x \\ & {}_tp_x = 1 - t \cdot q_x \qquad (0 \leqslant t < 1) \\ & \mu_{x+t} = \frac{q_x}{1 - tq_x} \\ & {}_tp_x \mu_{x+t} = q_x \end{aligned} \right. \tag{1.4.15} $$

[例 1.4.1] 设(x)在$[x, x+1]$上服从死亡均匀分布，试证：

$$\mathring{e}_x = e_x + \frac{1}{2}$$

证明：根据式(1.4.3)，在死亡均匀分布的条件下，有

$$L_x = \frac{1}{2}(l_x + l_{x+1})$$

故
$$\begin{aligned}
\mathring{e}_x &= \frac{T_x}{l_x} = \frac{1}{l_x}(L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + \cdots) \\
&= \frac{1}{l_x}\left(\frac{1}{2}(l_x + l_{x+1}) + \frac{1}{2}(l_{x+1} + l_{x+2}) + \frac{1}{2}(l_{x+2} + l_{x+3}) + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{l_x}\left[\frac{1}{2}l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \cdots}{l_x} \\
&= e_x + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

[例 1.4.2] 记$S(x) = T(x) - K(x)$，$k = K(x)$，且$s = S(x)$服从均匀分布(其中，x是非负整数，$0 \leqslant s \leqslant 1$)。试证：

$$Pr(k < T(x) \leqslant k + s) = Pr(K(x) = k) \cdot Pr(S(x) \leqslant s)$$

证明：根据式(1.2.10)，可知

$$Pr(k < T(x) \leqslant k + s) = {}_kp_x \cdot {}_sq_{x+k}$$

而$s = S(x)$服从均匀分布，根据式(1.4.15)，有

$$\begin{aligned}
Pr(k < T(x) \leqslant k + s) &= {}_kp_x \cdot {}_sq_{x+k} \\
&= s \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} = s \cdot Pr(K(x) = k)
\end{aligned}$$

$$Pr(S(x) \leqslant s) = \int_0^s 1\,ds = s$$

故
$$Pr(k < T(x) \leqslant k + s) = Pr(k(x) = k) \cdot Pr(S(x) \leqslant s)$$

另，事件$(k < T(x) \leqslant k + s)$与事件$(K(x) = k) \cap (S(x) \leqslant s)$是同一事件，则

$$Pr[(K(x) = k) \cap (S(x) \leqslant s)] = Pr(K(x) = k) \cdot Pr(S(x) \leqslant s)$$

这一结果表明：当$s = S(x)$服从均匀分布时，随机变量$K(x)$与$S(x)$是相互独立的。

2. 常值死力假设。常值死力假设，有时也称 CFM 假设，即生存函数$s(x)$满足关系式

$$s(x + t) = s(x)e^{-\mu_x t} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{1.4.16}$$

其中，$\mu_x = -\ln p_x$。

在常值死力的假设下，运用式(1.4.16)可得

$$\begin{aligned}
& l_{x+t} = l_x e^{-\mu_x t} \\
& {}_tq_x = 1 - e^{-\mu_x t} \\
& {}_tp_x = e^{-\mu_x t} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1) \\
& \mu_{x+t} = \mu_x \\
& {}_tp_x\mu_{x+t} = \mu_x e^{-\mu_x t}
\end{aligned} \tag{1.4.17}$$

[例 1.4.3] 试证：在常值死力假设的条件下，有

$$ {}_sq_{x+t}=1-e^{-\mu_x s}(0\leqslant t\leqslant 1,\ 0\leqslant s\leqslant 1 \text{ 且 } 0\leqslant t+s\leqslant 1) $$

证明： 根据式(1.4.8)，有

$$ {}_sq_{x+t}=1-\frac{l_{x+t+s}}{l_{x+t}} $$

在常值死力假设的条件下，则

$$ {}_sq_{x+t}=1-\frac{e^{-\mu_x(t+s)}}{e^{-\mu_x t}}=1-e^{-\mu_x t} $$

3．Balducci 假设。Balducci 假设，是指生存函数 $s(x)$ 满足关系式

$$ \frac{1}{s(x+t)}=\frac{1-t}{s(x)}+\frac{t}{s(x+1)}\quad (0\leqslant t\leqslant 1) \tag{1.4.18} $$

在 Balducci 假设条件下，运用式(1.4.18)可得

$$ l_{x+t}=\frac{l_x\cdot l_{x+1}}{tl_x+(1-t)l_{x+1}} $$

$$ {}_tq_x=\frac{tq_x}{1-(1-t)q_x} $$

$$ {}_tp_x=\frac{p_x}{1-(1-t)q_x}\quad (0\leqslant t\leqslant 1) \tag{1.4.19} $$

$$ \mu_{x+t}=\frac{q_x}{1-(1-t)q_x} $$

$$ {}_tp_x\mu_{x+t}=\frac{p_xq_x}{[1-(1-t)q_x]^2} $$

以上三种假设，在精算学中使用广泛。但是，在本书中主要是采用死亡均匀分布假设。

1.4.4 生命表实例

生命表是计算保险费率和提存责任准备金的基础。表 1－5 是 1990—1993 年中国人寿保险业的经验生命表(非养老金业务男表)。

表 1－5　中国人寿保险业经验生命表(非养老金业务男表)(1990—1993 年)

年龄(x)	死亡概率	生存人数	死亡人数	生存人年数		平均余命
	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\mathring{e}_x$
0	0.003037	1000000	3037	998482	73641337	73.64
1	0.002157	996963	2150	996888	72652855	72.86
2	0.001611	994813	1603	994011	71646967	72.02
3	0.001250	993210	1242	992589	70652956	71.14
4	0.001000	991968	922	911472	69660367	70.22
5	0.000821	990976	814	990570	68668894	69.29
6	0.000690	990163	683	989821	67678325	68.35
7	0.000593	989480	587	989186	66688504	67.40
8	0.000520	988893	514	988636	65699317	66.44

续表

年龄(x)	死亡概率	生存人数	死亡人数	生存人年数		平均余命
	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\mathring{e}_x$
9	0.000468	988379	463	988147	64710682	65.47
10	0.000437	987916	432	987700	63722534	65.50
11	0.000432	987484	427	987271	62734834	63.53
12	0.000458	987058	452	986832	61747563	62.56
13	0.000516	986606	509	986351	60760731	61.59
14	0.000603	986097	595	985799	59774380	60.62
15	0.000706	985502	696	985154	58788581	59.65
16	0.000812	984806	800	984406	57803427	58.70
17	0.000907	984007	892	983650	56819020	57.74
18	0.000981	983114	964	982632	55835460	56.79
19	0.001028	982150	1010	981645	54852828	55.85
20	0.001049	981140	1029	980625	53871183	54.91
21	0.001048	980111	1029	980625	53871183	54.91
22	0.001030	979084	1008	978579	51910961	53.02
23	0.001003	978075	981	977585	50932381	52.07
24	0.000972	977094	950	976619	49954797	51.13
25	0.000945	976144	922	976683	48978178	50.18
26	0.000925	975222	902	974771	48002494	49.22
27	0.000915	974320	892	973874	47027723	48.27
28	0.000918	973428	894	972982	46053849	47.31
29	0.000933	972535	907	972081	45080868	46.35
30	0.000963	971627	936	971160	44108787	45.40
31	0.001007	970692	977	970203	43137627	44.44
32	0.001064	969714	1032	969198	42167424	43.48
33	0.001136	968682	1100	968132	41198226	42.53
34	0.001222	967582	1182	966991	40230094	41.58
35	0.001321	996400	1277	965761	39263103	40.63
36	0.001436	965123	1386	964430	38297341	39.68
37	0.001565	963737	1508	962983	37332911	38.74
38	0.001710	962229	1645	961406	36369928	37.80
39	0.001872	960583	1798	959684	35408522	36.86
40	0.002051	958785	1966	957802	34468838	35.93
41	0.002250	956819	2153	955742	33491036	35.00
42	0.002470	954666	2358	953487	32535294	34.08
43	0.002713	952308	2584	951016	31581807	33.16

续表

年龄(x)	死亡概率	生存人数	死亡人数	生存人年数		平均余命
	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\mathring{e}_x$
44	0.002981	949724	8231	948309	30630791	32.25
45	0.003276	946893	3102	945342	29682482	31.53
46	0.003601	943791	3399	942092	28737140	30.45
47	0.003958	940393	3722	938532	27795048	29.56
48	0.004352	936670	4076	934632	26856516	28.67
49	0.004784	932594	4462	930363	25921884	27.80
50	0.005260	928133	4882	925692	24991521	26.93
51	0.005783	923251	5339	920581	24062859	26.07
52	0.006358	917911	5836	914993	23145248	25.22
53	0.006991	912075	6376	908887	22230255	24.37
54	0.007686	905699	6961	902218	21321368	23.54
55	0.008449	898738	7593	894941	20419149	22.72
56	0.009288	891144	8277	877066	19524208	21.91
57	0.010210	882867	9014	878360	18637202	21.11
58	0.011222	873853	9806	868950	17758842	20.32
59	0.012333	864047	10656	858719	16889892	19.55
60	0.013553	853391	11566	847608	16031173	18.79
61	0.014892	841825	12536	835556	15183565	18.04
62	0.016361	829288	13538	822504	14348009	17.30
63	0.017972	815720	14660	808390	13525504	16.58
64	0.019740	801060	15813	793154	12717144	15.88
65	0.021677	785247	17022	776736	11923961	15.18
66	0.023800	768225	18284	759084	11147224	14.51
67	0.026125	749942	19592	740146	10388141	13.85
68	0.028671	730349	20940	719879	9647995	13.51
69	0.031457	709410	22316	698252	8928116	12.59
70	0.034504	687094	23707	675240	8229864	11.98
71	0.037835	663386	25099	650837	7554624	11.39
72	0.041474	138287	26472	625051	6903788	10.82
73	0.045446	611815	27805	597912	6278737	10.26
74	0.049779	584010	29071	569474	5680825	9.73
75	0.054501	554939	30245	539816	5111350	9.21
76	0.059644	524694	31295	509047	4571534	8.71
77	0.065238	493399	32188	477305	4062487	8.23
78	0.071317	461211	32892	444765	3585182	7.77

续表

年龄(x)	死亡概率	生存人数	死亡人数	生存人年数		平均余命
	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\mathring{e}_x$
79	0.077916	428319	33373	411632	3140418	7.33
80	0.085069	394946	33598	378147	2728786	6.91
81	0.092813	361348	33538	344579	2350639	6.51
82	0.101184	327810	33569	311226	2006060	6.12
83	0.110218	294641	32475	278404	1694834	5.75
84	0.119951	262166	31447	246443	1416430	5.40
85	0.130418	230719	30090	215674	1169987	5.07
86	0.141651	200629	28419	186420	954313	4.76
87	0.153681	172210	26465	158977	767893	4.46
88	0.166534	145745	24271	133609	608916	4.18
89	0.180233	121473	21893	110526	475307	3.91
90	0.194795	99580	19398	89881	364781	3.66
91	0.210233	80182	16857	71754	274900	3.43
92	0.226550	63325	14346	56152	203146	3.21
93	0.243742	48979	11938	43010	146994	3.00
94	0.261797	37041	9697	32192	103985	2.81
95	0.280694	27344	7675	23506	71793	2.63
96	0.300399	19668	5908	16714	48287	2.46
97	0.320871	13760	4415	11552	31573	2.29
98	0.342055	9345	3196	7747	20020	2.14
99	0.363889	6148	2237	5030	12274	2.00
100	0.386299	3911	1511	3156	7244	1.85
101	0.409200	2400	982	1909	4088	1.70
102	0.432503	1418	613	1111	2179	1.54
103	0.456108	805	367	621	1068	1.33
104	0.479911	438	210	333	446	1.02
105	1.000000	228	228	114	114	0.50

对 1990—1993 年中国人寿保险业经验生命表(非养老金业务男表)作如下的评注将有益于读者:

① 新生儿生存组中大约有 3‰预期在生命的第一年内死亡;

② 新生儿生存组中约有 78.5% 可期望活到 65 岁;

③ 新生儿生存组中死亡人数在 80 岁时预期发生最多;

④ 新生儿生存组中死亡人数局部极小值预期发生在 11 岁及 27 岁附近;

⑤ 表中给出的极限年龄是 $\omega = 105$ 岁。

表达式(1.4.3)的形式是描述死亡年龄(离散型)分布的常规方法，而可以用解析形式(连续型)作为另外一种代替的方法来描述生存函数 $s(x)$。由于生命表中只对整数年龄 x 列了 $l_x = l_0 s(x)$(这里隐含的 $s(x) = l_x / l_0$)，而对于非整数年龄 x，则需要用关于尾龄的若干假设来估计 $s(x)$。

[例 1.4.4] 根据表 1－5，并在死亡均匀分布条件下估计：

(1) $s(59.12)$；　(2) ${}_{0.12}p_{59}$；

(3) $\mu_{59.12}$；　(4) ${}_{0.38}q_{59.12}$；

解：(1) $s(59.12) = \frac{1}{l_0} \cdot l_{59.12} = \frac{1}{l_0}(l_{59} - 0.12 \cdot d_{59})$

$$= \frac{1}{1000000}(864047 - 0.12 \times 10656) = 0.862768$$

(2) ${}_{0.12}p_{59} = 1 - 0.12 \times q_{59} = 1 - 0.12 \times 0.012333 = 0.998520$

(3) $\mu_{59.12} = \frac{q_{59}}{1 - 0.12 q_{59}} = \frac{0.012333}{1 - 0.12 \times 0.012333} = 0.012351$

(4) ${}_{0.38}q_{59.12} = \frac{0.38 q_{59}}{1 - 0.12 q_{59}} = \frac{0.38 \times 0.012333}{1 - 0.12 \times 0.012333} = 0.004693$

1.4.5 选择—终极生命表

前面，我们讨论(x)生存到 $x+t$ 岁的概率${}_tp_x$ 是原有的新生婴儿在 x 岁时仍生存假设条件下的概率，但是若对现年 x 岁的生存者进行观察，则可获得比新生婴儿单纯生存到 x 岁更多的信息，例如，刚通过保险体检或刚开始对某疾病进行治疗等。那么，对于(x)可进一步获得信息情况下的概率，用原始生存函数计算有关(x)的未来寿命的概率，显然是不妥的。例如一个年龄为 x 岁的人可能已购买人寿保险，这一信息促使我们认为其未来寿命分布不同于我们原来的假设。在这种情况下，需要能反映新获得信息的特殊生存函数。即关于这种生存的完整模型是一族生存函数，对每一个诸如投保或致残的年龄，都有一个相应的生存函数。这一族生存函数，我们可看成一个二元函数，其一个变量是获得新信息的年龄，记作$[x]$；另一个变量是(x)生命延续时间 t。这样，与这个二元生存函数相联系的每一个生命表函数都是按$[x]$与 t 排列的二元阵列。例如，已知一组年龄为 30 岁人群的特殊信息，就可为他们建立一个特殊生命表。年龄为 30 岁的人在 $x+i$ 岁与 $x+i+1$ 岁之间死亡的条件概率，记作 $q_{[30]+i}$，$i=0,1,2,\cdots$。

表 1－6 中表体的第一行第一列中的下标[30]表明是在 30 岁获得特殊信息后的生存函数，第一行的数值是在 30 岁获得特殊信息后的死亡概率。在精算学中，像这样的生存表称为选择生命表。

选择对于(x)未来寿命 $T(x)$的概率分布的影响，会在选择之后逐渐消失。即经过一段时间，不论曾经在哪一年龄选择，活到相同岁数的生存者，其死亡概率将基本上相同。精确地说，对于某个正数 ϵ，如存在一个最小整数 r，则使得对所有选择年龄$[x]$及所有 $j>0$，均有

$$\left| q_{[x]+r} - q_{[x-j]+r+j} \right| < \epsilon \tag{1.4.20}$$

那么，可以通过截断二维阵列的 $r+1$ 列以后各列而建立的生命表，称为选择—终极生命表。表 1－6 是英国 1967 年—1970 年选择—终极生命表的一部分。

表 1－6　　1967—1970 年英国选择—终极生命表(部分)

年龄 $[x]$	(1) $1000q_{[x]}$	(2) $1000q_{[x]+1}$	(3) $1000q_{x+2}$	(4) $l_{[x]}$	(5) $l_{[x]+1}$	(6) $l_{[x]+2}$	年龄 $[x]+2$
30	0.43767	0.57371	0.69882	33829	33814	33796	32
31	0.45326	0.59924	0.73813	33807	33791	33771	33
32	0.47711	0.63446	0.79004	33784	33767	33746	34
33	0.50961	0.68001	0.85577	33760	33742	33719	35
34	0.55117	0.73655	0.93663	33734	33715	33690	36

根据式(1.4.20)，对于延续时间超过整数 r 的死亡概率，可以采用如下近似公式

$$q_{[x-j]+r+j} \approx q_{[x]+r} \quad (j>0)$$

进行计算，这时整数 r 称为选择期，表 1－6 中的选择期 $r=2$。

对于超过选择期的有关死亡概率，我们是以达到的年龄作为下标的。例如，若选择期 $r=5$，则 $q_{[30]+5}$、$q_{[27]+8}$都写成 q_{35}。

在表 1－6 中我们可以看到，32 岁的生存者有三个死亡概率 $q_{[32]}$、$q_{[31]+1}$、q_{32}，且 $q_{[32]}<q_{[31]+1}<q_{32}$。

这些概率的大小顺序有一定的实际意义，这是因为刚加人人寿保险者的死亡率应该是较低一些的。表 1－6 中的列(3)称为终极死亡概率，即保险公司对被保险少人体验，接受承保后超过选择期的死亡概率。依据终极死亡概率编制的生命表，称为终极生命表。而依据选择期各年度的死亡概率编制的生命表，称为选择生命表。例如，表 1－6 中前三列，即$[x]$、$1000q_{[x]}$、$1000q_{[x]+1}$组成的生命表就是选择生命表。

建立选择—终极生命表，一般先建立终极部分，然后，再建立选择部分。终极部分可通过决定性生存组，根据诸如等式

$$l_x = l_0(1-{}_xq_0) \tag{1.4.21}$$

来产生一组数值 $l_{x+r}=lq_{[x]+r}$，其中，r 是选择长度。选择部分，可根据关系式

$$l_{[x]+r-k-1}=\frac{l_{[x]+r-k}}{p_{[x]+r-k-1}} \quad (k=0,1,2,\cdots,r-1) \tag{1.4.22}$$

来完成。

[例 1.4.5] 试用表 1－6 中的数字估计下列各值：

(1)${}_2p_{[30]}$　　(2)${}_{2|}q_{[30]}$

(3)${}_3q_{[31]+1}$　　(4)${}_2p_{[33]+1}$

解：(1)$${}_2p_{[30]}=\frac{l_{[30]+2}}{l_{[30]}}=\frac{33796}{33829}=0.99902$$

(2)$${}_{2|}q_{[30]}=\frac{l_{[30]+2}-l_{[30]+3}}{l_{[30]}}=\frac{l_{32}-l_{33}}{l_{[30]}}$$
$$=\frac{33791(33795)-33771}{33829}=0.00071$$

(3)$${}_3q_{[31]+1}=\frac{l_{[31]+1}-l_{[31]+4}}{l_{[31]+1}}=\frac{l_{[31]+1}-l_{35}}{l_{[31]+1}}=\frac{l_{[31]+1}-l_{[33]+2}}{l_{[31]+1}}$$

$$= \frac{33791 - 33719}{33791} = 0.00213$$

$$(4)\ {}_2p_{[33]+1} = \frac{l_{[33]+3}}{l_{[33]+1}} = \frac{l_{36}}{l_{[33]+1}} = \frac{33690}{33742} = 0.99846$$

1.4.6 随机变量 T(x)与 K(x)的方差公式

前面，我们讨论了随机变量 $T(x)$和 $K(x)$的概率分布，以及其均值 $E[T(x)]$、$E[K(x)]$，这里，我们只讨论一下有关 $T(x)$与 $K(x)$的方差。

根据式(1.4.7)与式(1.3.2)，我们有

$$E[T(x)]^2 = \int_0^{+\infty} t^2{}_tp_x\mu_{x+t}dt = -\int_0^{-\infty} t^2 d({}_tp_x) = 2\int_0^{+\infty} t\,{}_tp_x\,dt$$

故
$$Var[T(x)] = E[T(x)^2] - E[T(x)]^2 = 2\int_0^{+\infty} t\,{}_tp_x dt - (\mathring{e}_x)^2 \tag{1.4.23}$$

同理，对于随机变量 $K(x)$的方差，我们有类似式(1.4.23)的公式，即

$$Var[K(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} [(2k+1)\cdot{}_{k+1}p_x] - e_x^2 \tag{1.4.24}$$

[例 1.4.6] 设随机变量 T 的概率密度函数为

$$f(t) = c\cdot\exp(-ct) \quad (c>0, t\geqslant 0)$$

计算：$\mathring{e}_x$ 与 $Var(T)$。

解：依题意，则

$${}_tq_x = \int_0^t f(s)\,ds = \int_0^t c\exp(-cs)\,ds = 1 - \exp(-ct) \quad (c>0, t\geqslant 0)$$

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = \exp(-ct) \quad (t\geqslant 0, c>0)$$

故
$$\mathring{e}_x = E(T) = \int_0^{\infty} tf(t)\,dt = \int_0^{\infty} \exp(-ct)\,dt = \frac{1}{c} \quad (c>0)$$

运用式(1.4.23)可得

$$Var(T) = 2\int_0^{+\infty} t\,{}_tp_x dt - \mathring{e}_x = 2\int_0^{+\infty} t\exp(-ct)\,dt - \frac{1}{c^2} = \frac{2}{c^2} - \frac{1}{c^2} = \frac{1}{c^2}$$

习 题 一

1. 设生存函数 $s(x) = 1 - \frac{1}{10}\sqrt{x}$，$0\leqslant x\leqslant 100$，试计算：

(1)年龄为 0 岁的婴儿在 16 岁到 36 岁之间的死亡概率；

(2)年龄为 16 岁的人将生存到 36 岁的概率。

2. 设 X 的分布函数为 $F(x) = \frac{x}{1+x}$，$x\geqslant 0$，试计算：

(1)年龄为 20 岁的人在 40 岁之前的死亡概率；

(2)年龄为 20 岁的人在 30 岁到 40 岁之间的死亡概率。

3. 设生存函数 $s(x) = 1 - \frac{x}{100}$，$0\leqslant x\leqslant 100$，试计算：

(1)分布函数 $F(x)$ 与密度函数 $f(x)$；

(2)$P(10\leqslant X\leqslant 40)$；

(3)$P(10\leqslant X\leqslant 40 \mid X\geqslant 10)$；

(4)${}_{20}q_{20}$ 与 ${}_{30}p_{20}$ 及 ${}_{10|20}q_{20}$。

4. 新生婴儿死亡年龄 X 的概率密度函数为 $f(x)=\dfrac{2x}{6400}$，$0\leqslant x\leqslant 80$，求年龄为 40 岁的人的未来寿命 T 的概率密度函数。

5. 若年龄为 20 岁的人在 67.83 岁时死亡，试求 $T(20)$ 与 $K(20)$。

6. 已知：${}_{t|}q_x=0.1$，$t=0,1,2,\cdots,9$，计算：${}_2p_{x+5}$。

7. 设 $s(x)$ 是生存函数，函数 $\varphi(x)=\dfrac{2}{75}x^{-\frac{1}{3}}$ 且 $\varphi(x)+s'(x)=0$。试求：

(1)生存函数 $s(x)$ 及极限年龄 ω；

(2)$\int_0^{\omega}\varphi(x)dx$；

(3)年龄为 0 岁的婴儿在 x 岁到 $x+n$ 岁之间的死亡概率。

8. 设生存函数 $s(x)=\exp(-x)$，$x\geqslant 0$，试求 $F(x)$、$f(x)$ 及 μ_x。

9. 设 $F(x)=1-\dfrac{1}{1+x}$，$x\geqslant 0$，试求 $s(x)$、$f(x)$ 及 μ_x。

10. 设死力为 $\mu_x=\tan x$，$0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}$，试求 $s(x)$、$F(x)$ 及 $f(x)$.

11. 已知生存函数 $s(x)=\dfrac{9000-10x-x^2}{9000}$，$0\leqslant x\leqslant 90$

试计算：$q_{50}-\mu_{50}$。

12. 试证：

(1)$\dfrac{d}{dx}(l_x\mu_x)<0$，当 $\dfrac{d}{dx}\mu_x<\mu_x^2$；

(2)$\dfrac{d}{dx}(l_x\mu_x)>0$，$\dfrac{d}{dx}\mu_x>\mu_x^2$；

(3)$\dfrac{d}{dx}(l_x\mu_x)=0$，$\dfrac{d}{dx}\mu_x=\mu_x^2$。

13. 设 $l_x=10(100-x)^2$，$0\leqslant x\leqslant 100$. 试计算：

(1)${}_tp_x$ 与 ${}_tq_x$ 及 $s(x)$；(2)$T(x)$ 的期望值 $\mathring{e}_x$。

14. 试证：

(1)$\dfrac{d}{dx}(q_x)=-p_x(\mu_x-\mu_{x+1})$；

(2)$\dfrac{d}{dx}(\mathring{e}_x)=\mathring{e}_x\mu_x-1$.

15. 设 $l_x=200(100-x)$，$0\leqslant x\leqslant 100$. 试求

(1)${}_{21}q_x$，${}_{10|}q_x$；

(2)死力 μ_x.

16. 试证：

(1)$l_x-l_{x+n}=d_x+d_{x+1}+d_{x+2}\cdots+d_{x+n-1}$；

(2)${}_{m+n}p_x={}_mp_x-{}_{m+n}p$；

(3) $q_x + p_x \cdot q_{x+1} + {}_2p_x \cdot q_{x+2} + \cdots = 1$.

17. 如果 $l_{25} = 1000, l_{28} = 955$，$q_{25} = 0.01$，$p_{27} = \frac{955}{975}$，求 q_{26}。

18. 已知现年 18 岁的人，再生存 10 年的概率为 0.95，再生存 30 年的概率为 0.75，试求现年 28 岁的人在达到 48 岁之前的死亡概率。

19. 设死力，$\mu_x = 0.001$，$21 \leqslant x \leqslant 25$，试计算${}_{31}q_{20}$及${}_{2|2}q_{20}$。

20. 设 $\mu_x = kx$，$x > 0$，且${}_{10}p_{35} = 0.81$，试计算${}_{20}p_{40}$与${}_{2|3}q_{35}$。

21. 试求在 *UDD* 假设条件下，随机变量 $T(x)$的分布函数 $F(t)$、密度函数 $f(t)$和生存函数 $s(t)$及死力 μ_{x+t}、$q_{x+t}(0 \leqslant s,\ t \leqslant 1$ 且 $0 \leqslant s + t \leqslant 1)$。

22. 试求在 *CFM* 假设条件下，随机变量 $T(x)$的分布函数 $F(t)$、密度函数 $f(t)$和生存函数 $s(t)$及死力 μ_{x+t}、$q_{x+t}(0 \leqslant s,\ t \leqslant 1$ 且 $0 \leqslant s + t \leqslant 1)$。

23. 试求在 *Balducci* 假设条件下，随机变量 $T(x)$的分布函数 $F(t)$、密度函数 $f(t)$和生存函数 $s(t)$及死力 μ_{x+t}、$q_{x+t}(0 \leqslant s,\ t \leqslant 1$ 且 $0 \leqslant s + t \leqslant 1)$。

24. 设 $l_{40} = 7746$，$l_{41} = 7681$，试在下列三种假设条件下计算 $\mu_{40.25}$。

(1) *UDD* 假设；

(2) *CFM* 假设；

(3) *Balducci* 假设。

25. 已知 $q_x = 0.12$，试计算

(1) 在 *UDD* 假设下${}_{1/3}q_{x+1/2}$；

(2) 在 *Balducci* 假设下，${}_{1/3}q_x$；

(3) 在 *CFM* 假设下，${}_{1/2}q_x$。

26. 试证：在 *UDD* 假设条件下

$$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$

27. 证明：$L_x = a(x)l_x + [1 - a(x)]l_{x+1}$。

28. 设(x)在 x 岁与 $x+1$ 岁之间是死亡均匀分布，试证：平均生存年数 $a(x) = \frac{1}{2}$。

29. 设死力 μ_x具有 *Weibull* 形式，试求随机变量 $T(x)$的概率密度函数 $f(t)$和生存函数 $s(x)$。

30. 如果 $\mu(x) = \frac{1}{50 - (x/2)}$，$0 \leqslant x \leqslant 100, l_0 = 10000$，求 $\mathring{e}_0$。

31. 设生存函数

$$s(x) = \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^a (0 \leqslant x < \omega,\ a > 0)$$

试计算 μ_x和$\mathring{e}_x$。

32. 设死力 $\mu_{x+t} = t$，$t > 0$，计算：

(1) ${}_tp_x \cdot \mu_{x+t}$；

(2) $\mathring{e}_x$。

33. 用表 1-6 中的数值，估计下列值：

(1) ${}_3q_{[32]}$；　　(2) ${}_{2|}q_{[32]}$；

(3) ${}_3q_{[32]+1}$；　　(4) ${}_{3|}p_{[31]+1}$。

34. 符号

$$I(x,\ k)=1-\frac{q_{[x]+k}}{q_{x+k}}$$

称为选择指数，当 $I(x,\ k)$接近于 0 时，表明选择的作用消失。试用表 1－6 中的数值，计算选择指数 $I(32,\ 1)$及 $I(32,\ 2)$。

35. 给定如下 2 年选择期的选择—终极生命表：

$[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
92			6300	94
93			5040	95
94			3024	96

对所有的 x 满足如下关系式：

(1)$2q_{[x]+1}=3q_{[x+1]}$；

(2)$3q_{x+2}=4q_{[x+1]+1}$；

计算 $l_{[94]}$。

36. 给定如下 2 年选择期的选择—终极生命表：

$[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
60	80625	79954	78839	62
61	79137	78402	77252	63
62	77575	76770	75578	64

且尾龄服从 UDD 假设，

计算${}_{0.9}q_{[60]+0.6}$。

37. 对于一个 2 年选择期的选择—终极生命表，已知：

(1) $q_{96}=0.350, q_{97}=0.475,\ q_{98}=0.675$；

(2) $q_{[x]}=0.5q_x$；

(3) $q_{[x]+1}=0.5q_{x+1}$；

(4) $l_{[96]}=10000$；

试计算 $l_{[97]}$。

38. 设 $S(x)=T(x)-K(x)$，且 $s=S(x)$符合死亡均匀分布假设条件，试证：

(1) $\mathring{e}_x=e_x+\frac{1}{2}$

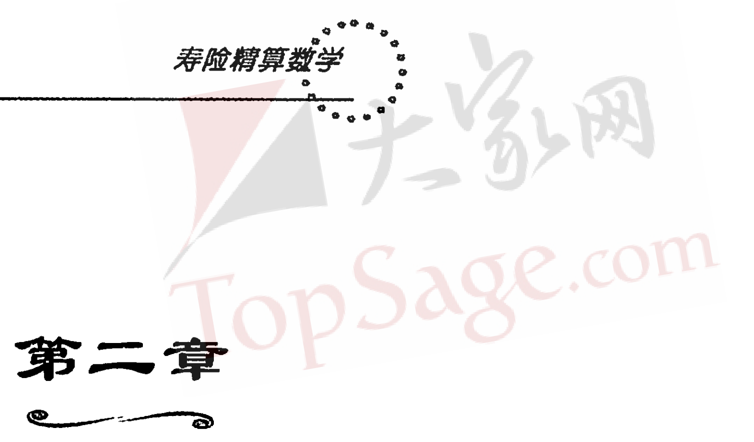
(2) $Var[T(x)]=Var[K(x)]+\frac{1}{12}$。

39. 如果 $l_x=10(100-x)^2$，计算 $Var(T(x))$。

40. 设随机变量 $T(x)$的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{100-t} & (0\leqslant t<100-x)\\ 1 & (t\geqslant 100-x)\end{cases}$$

试计算 $\mathring{e}_x$ 和方差 $Var[T(x)]$。



第二章

人寿保险的趸缴纯保费

本章主要内容： 本章以生命表的死亡率(或生存率)和预定年利率为基础，运用概率论的基本方法，讨论离散型和连续型数学模型下的各种寿险保单的趸缴纯保费，并试图在死亡均匀分布的精算假设条件下，分析连续型各寿险保单的趸缴纯保费与之相对应离散型寿险保单趸缴纯保费之间的关系。最后，本章还讨论了离散型终身寿险保单趸缴纯保费的递推方程式和连续型终身寿险保单趸缴纯保费的微分方程式。

本章主要词汇： 人寿保险　离散型　连续型　死亡均匀分布　趸缴纯保费

§2.1　人寿保险概述

人寿保险是指以人的生命作为保险标的，当被保险人在保险期限内因疾病导致死亡或在保险期届满时仍生存，按照保险合同预先的约定，保险人向保单指定受益人支付保险金的一种保险。

图 2-1 给出了本章所述人寿保险的结构：

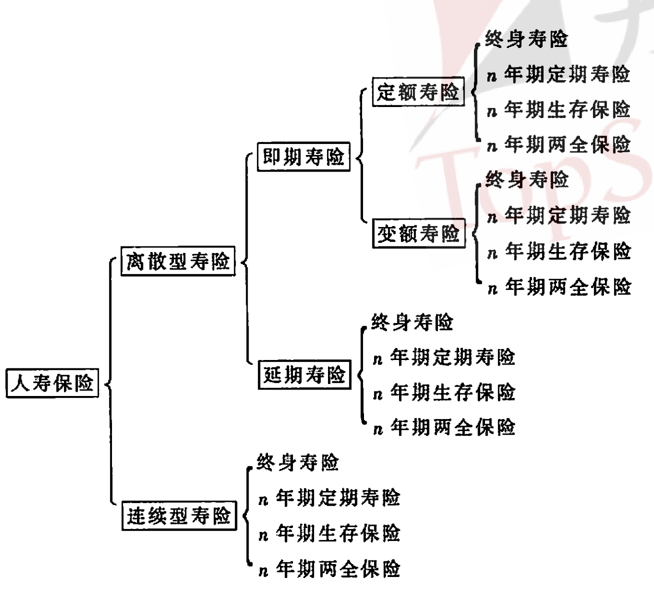


图 2-1 结构示意图

§2.2 离散型人寿保险模型

所谓离散型人寿保险模型，是指以离散型未来寿命 $K(x)$为基础，保险金是在被保险人死亡所处的保单年度末支付而建立的各种人寿保险的数学模型。

假设被保险人在投保(或签单)时的年龄为 x 岁，其未来寿命整年数为 $K(x)$，则其概率分布律为

$$Pr(K(x)=k)={}_kp_xq_{x+k}={}_{k|}q_x \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

假设保险金额在 $K(x)+1$ 处给付，给付数额为 b_{k+1}元，记 v_{k+1}为在 $K(x)+1$ 处给付 1 个单位保险金在签单时的利息贴现系数，Z 为给付保险金额在签单时的现值。则

$$Z=b_{K+1}\cdot v_{K+1} \quad (K=0,1,2,\cdots)$$

因此，在离散型人寿保险模型下，现值随机变量 Z 的期望值 $E(Z)$的一般表达式是

$$E(Z)=\sum_{k=0}^{\infty} v_{k+1}b_{k+1}\cdot {}_{k|}q_x \tag{2.2.1}$$

对于人寿保险，现值随机变量 Z 的期望值 $E(Z)$称为趸缴纯保费。趸缴意味着一次性缴付而不是按其他方式分期缴付。

下面，我们运用式(2.2.1)考察离散型寿险模型下各种人寿保险的趸缴纯保费。

2.2.1 死亡保险

死亡保险分为 n 年定期寿险和终身寿险。

设年龄为 x 岁的人，投保或签约保险金额为 1 个单位的 n 年定期寿险，则给付现值函数是

$$Z=\begin{cases}v^{K+1} & (K=0,1,2,\cdots,n-1)\\0 & 其他\end{cases}$$

其趸缴纯保费用符号 $A_{x:\overline{n}|}^{1}$表示，根据式(2.2.1)，则

$$A_{x:\overline{n}|}^{1}=\sum_{k=0}^{n-1}v^{k+1}\cdot{}_{k|}q_x=\sum_{k=0}^{n-1}v^{k+1}\cdot\frac{d_{x+k}}{l_x}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{v^{x+k+1}d_{x+k}}{v^x l_x}\tag{2.2.2}$$

记

$$C_x=v^{x+1}d_x\qquad D_x=v^x l_x,$$

$$M_x=\sum_{k=0}^{\infty}C_{x+k},\quad N_x=\sum_{k=0}^{\infty}D_{x+k}$$

$$R_x=\sum_{k=0}^{\infty}M_{x+k},\quad S_x=\sum_{k=0}^{\infty}N_{x+k}$$

$$(x=0,1,2,\cdots,\omega)$$

其中，D_x，C_x，M_x，N_x，R_x，$S_x(x=0,1,2,\cdots,\omega)$称为换算符号。

由 C_x，M_x，R_x和年龄 x，或 D_x，N_x，S_x和年龄 x 组成的阵列称为换算函数表(见附表Ⅱ)，简称换算表。

在式(2.2.2)中，用 C_x，D_x，M_x代替，可得

$$A_{x:\overline{n}|}^{1}=\frac{M_x-M_{x+n}}{D_x}\tag{2.2.3}$$

记 ${}^2A_{x:\overline{n}|}^{1}=E(Z^2)$，则

$${}^2A_{x:\overline{n}|}^{1}=\sum_{k=0}^{n-1}(v^{k+1})^2\cdot{}_{k|}q_x=\sum_{k=0}^{n-1}\exp[-2\delta(k+1)]\cdot{}_{k|}q_x$$

其中：$\delta=-\ln v$ 称为利力。

故

$$Var(Z)=E(Z^2)-(E(Z))^2={}^2A_{x:\overline{n}|}^{1}-(A_{x:\overline{n}|}^{1})^2\tag{2.2.4}$$

[**例 2.2.1**] 设年龄为 35 岁的人投保离散型的保险金额为 5000 元的 25 年定期寿险。求该保单的趸缴纯保费(年利率 $i=6\%$)。

解：根据式(2.2.3)，则

$$A_{35:\overline{25}|}^{1}=\frac{M_{35}-M_{60}}{D_{35}}=\frac{14116.12-9301.689}{126513.80}=0.03806$$

故该保单的趸缴纯保费

$$P=5000\cdot A_{35:\overline{60}|}^{1}=5000\times0.03806=190.3$$

特别的，当 $n=1$ 时，式(2.2.3)转化为

$$A_{x:\overline{1}|}^{1}=\frac{C_x}{D_x}$$

在人寿保险中，纯保费 $A_{x:\overline{1}|}^{1}$通常称为自然纯保费，并用符号 c_x 表示，即

$$c_x=\frac{C_x}{D_x}$$

根据中国人寿保险业经验生命表(非养老金业务混合表，见附录 $I(C)$)，预定年利率 $i=6\%$，则年龄为 35 岁的人，保额为 5000 元的离散型死亡保险，其自然纯保费是 5000

$\times c_{35}=4.99$ 元。读者可以验算，自然纯保费在一般情况下是随着年龄的增长而增加的，即年龄越大，自然纯保费越高。

对于(x)投保离散型的保险金额为 1 个单位的终身寿险，其趸缴纯保费(用符号 A_x表示)可在式(2.2.2)中令 $n\to\infty$得到：

$$A_x=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\cdot{}_{k|}q_x \tag{2.2.5}$$

式(2.2.5)中用换算符号替代，可得：

$$A_x=\frac{M_x}{D_x} \tag{2.2.6}$$

若在式(2.2.5)的两边乘以 l_x，则得

$$l_xA_x=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}d_{x+k} \tag{2.2.7}$$

式(2.2.7)表明：保单签发时 l_x个年龄为 x 岁的被保险人所支付的趸缴纯保费组成的基金总额等于按死亡预定流出资金的现值总额。

表达式

$$l_{x+r}A_{x+r}=\sum_{k=r}^{\infty}v^{k+1}d_{x+k} \tag{2.2.8}$$

右边是保单自签发之日开始经过 r 年以后按死亡预期提供给付的那部分资金的现值。

式(2.2.8)中乘以 v^{-r}(即按预定利率积存 r 年)，得

$$v^{-r}l_{x+r}A_{x+r}=\sum_{k=r}^{\infty}v^{k-r+1}d_{x+r+k-r}=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}d_{x+r+k} \tag{2.2.9}$$

读者应该注意，数额 $v^{-r}l_{x+r}A_{x+r}$与一个实际基金在 r 年进行死亡给付后的剩余金额与利息收入之和在数值上有差异)，其差异来源于两个方面：其一是按采用的生命表预期死亡与实际死亡有偏差；其二是按预期利率计算的利息收入与实际利息收入有偏差。因此，对这些偏差进行解释是寿险公司精算师的职责之一。

[例 2.2.2] 设现有 100 个年龄为 30 岁的人组成一个互助会，并建立一笔基金，该项基金专门用于在他们每个成员死亡时给付其指定受益人 1000 元(给付时间是在死亡的基金年度末)。经商定：这笔基金总额是按 1990 年—1993 年中国人寿保险业经验生命表(非养老金业务混合表)和预定年利率 6% 来计算趸缴纯保费的，试问每个成员需要缴纳多少资金。若这个基金实际运作的结果是：在第二年与第五年分别有 1 人死亡，第一年的收益率是 6%，第二年和第三年的收益率是 6.5%，第四年与第五年的收益率是 7%。试分析在第五年度末该基金按计划之初决定的期望值与实际基金之间的差异。

解：每个成员需要缴纳的资金(也称会费)是

$$P=1000A_{30}=1000\cdot\frac{M_{30}}{D_{30}}=1000\times\frac{14730.24}{170037.90}=86.63(\text{元})$$

则 100 个成员所建立的基金总额是

$$S=100P=100\times 86.63=8663(\text{元})$$

在第五年度末该项基金按计划之初决定的期望值是

$$100\times 1000\frac{l_{35}}{l_{30}}\cdot A_{35}=10^5\cdot\frac{972396}{976611}\times\frac{14116.12}{126513.80}$$

$$= 10^5 \times 0.995684 \times 0.111578$$
$$= 11061.69(\text{元})$$

用 F_k 表示第 k 个基金年度末的基金值，则实际运作的结果是

$$F_0 = S = 8663(\text{元})$$
$$F_1 = 8663 \times (1 + 6\%) = 9182.78(\text{元})$$
$$F_2 = 9182.78 \times (1 + 6.5\%) - 1000 = 8779.66(\text{元})$$
$$F_3 = 8779.66 \times (1 + 6.5\%) = 9350.34(\text{元})$$
$$F_4 = 9350.34 \times (1 + 7\%) = 10004.86(\text{元})$$
$$F_5 = 10004.86 \times (1 + 7\%) - 1000 = 9705.20(\text{元})$$

所以，两者之间的差额是

$$11061.69 - 9705.20 = 1356.49(\text{元})$$

这一结果反映了五年间的投资与死亡的经验，一方面反映了实际投资收益超过了预期利率 6% 的年收益，而另一方面也反映了实际死亡人数 2 大大高于预期死亡人数 0.4488。

2.2.2 两全保险

n 年两全保险是由 n 年生存保险和 n 年定期寿险组成的，假设 (x) 签约保险金额为 1 个单位的 n 年两全保险，则其有关函数是

$$b_{k+1} = 1(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$v_{k+1} = \begin{cases} v^{k+1} & (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \\ v^n & (k \geqslant n) \end{cases}$$

趸缴纯保费(用符号 $A_{x:\overline{n|}}$ 表示)是

$$A_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_{k|}q_x + v^n \cdot {}_n p_x \tag{2.2.10}$$

运用换算函数替代，可得

$$A_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \tag{2.1.11}$$

[例 2.2.3]　设年龄 25 岁人购买离散型的保险金额为 5000 元的 30 年期两全保险，试求该保单的趸缴纯保费(预定年利率 $i = 6\%$)。

解：根据式(2.2.11)和题意，则

$$A_{25:\overline{30|}} = \frac{M_{25} - M_{55} + D_{55}}{D_{25}} = \frac{15434.48 - 10611.90 + 37176.27}{228385} = 0.183895$$

故该保单的趸缴纯保费是

$$5000 \cdot A_{25:\overline{30|}} = 5000 \times 0.183895 = 919.48(\text{元})$$

记 $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = v^n \cdot {}_n p_x$ 表示 n 年期生存保险的趸缴纯保费，则

$$A_{x:\overline{n|}} = A^1_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} \tag{2.2.12}$$

2.2.3 延期寿险

前面讨论的人寿保险模型，是寿险保单一经签订，保险保障即生效的保险。本书在没

有特别说明的情况下，均指的是这种情况，也可称为即期寿险。而本节我们考虑的情况为延期寿险，它意味着在保单签发后的若干年后才提供保障。假设(x)投保离散型的保险金额为1个单位的延期h年的n年定期寿险，则其有关函数是

$$b_{k+1}=\begin{cases}1 & (k=h,\ h+1,\ \cdots,\ h+n-1)\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$v_{k+1}=v^{k+1},\ (k=0,1,\ 2\cdots)$$

$$Z=b_{K+1}v_{K+1}=\begin{cases}v^{K+1} & (K=h,\ h+1,\ \cdots,\ h+n-1)\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则其趸缴纯保费，记作

$$_{h|}A^{1}_{x:\overline{n|}}=\sum_{k=h}^{h+n-1}v^{k+1}\cdot{}_{k|}q_x \tag{2.2.13}$$

用换算函数替代，可得

$$_{h|}A^{1}_{x:\overline{n|}}=\frac{M_{x+h}-M_{x+n+h}}{D_x} \tag{2.2.14}$$

［例 2.2.4］　试证：$_{h|}A^{1}_{x:\overline{n|}}=A_{x:\overline{h|}}^{\ \ 1}\cdot A^{1}_{x+h:\overline{n|}}$

$$=A^{1}_{x:\overline{n+h|}}-A^{1}_{x:\overline{h|}}$$

证明：
$$A^{1}_{x:\overline{n+h|}}-A^{1}_{x:\overline{h|}}=\sum_{k=0}^{n+h-1}v^{k+1}\cdot{}_{k|}q_x-\sum_{k=0}^{h-1}v^{k+1}\cdot{}_{k|}q_x$$

$$=\sum_{k=h}^{n+h-1}v^{k+1}\cdot{}_{k|}q_x$$

$$={}_{h|}A^{1}_{x:\overline{n|}}=\sum_{k=0}^{n-1}v^{h}v^{k+1}\cdot{}_{h}p_x\cdot{}_{k}p_{x+h}q_{x+h+k}$$

$$=v^{h}\cdot{}_{h}p_x\cdot\sum_{k=0}^{n-1}v^{k+1}\cdot{}_{k|}q_x$$

$$=A_{x:\overline{h|}}^{\ \ 1}\cdot A^{1}_{x+h:\overline{n|}}$$

类似地，记$_{h|}A_x$，$_{h|}A_{x:\overline{n|}}$分别表示(x)投保离散型的延期h年的保险金额为1个单位的终身寿险和两全保险的趸缴纯保费。即

$$_{h|}A_x=\sum_{k=h}^{\infty}v^{k+1}\cdot{}_{k|}q_x \tag{2.2.15}$$

$$_{h|}A_{x:\overline{n|}}=\sum_{k=h}^{n+h-1}v^{k+1}\cdot{}_{k|}q_x+v^{n+h}\cdot{}_{n+h}p_x \tag{2.2.16}$$

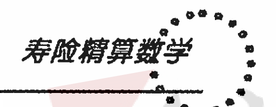
相应地，则有

$$_{h|}A_x=A_x-A^{1}_{x:\overline{h|}}=A_{x:\overline{h|}}^{\ \ 1}\cdot A_{x+h}$$

$$_{h|}A_{x:\overline{n|}}=A_{x:\overline{h|}}^{\ \ 1}\cdot A_{x+h:\overline{n|}}$$

2.2.4　非均衡给付保险

前面我们讨论的人寿保险模型，都是定额寿险模型。即其保险金额是不随被保险人未来寿命的变化而改变的，即保险金额给付是均衡的。本节我们考虑保险金额的给付随着被保险人未来寿命的变化而改变，这类人寿保险称为非均衡给付保险。在非均衡给付保险



中，我们主要讨论按算术数列$\{n\}$递增和递减的情形。

1. 递增的 n 年定期寿险。假设(x)投保离散型的按算术数列递增的 n 年期定期寿险，即若保险人在第 $k+1$ 个保单年度内死亡，则给付$(k+1)$元的保险金$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$，则相应的有关函数是

$$b_{k+1}=k+1 \qquad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$
$$v_{k+1}=v^{k+1} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$
$$Z=b_{K+1}v_{K+1}=(K+1)v^{K+1} \qquad (K=0,1,2,\cdots,n-1)$$

其趸缴纯保费记作$(IA)^{1}_{x:\overline{n|}}$，则

$$(IA)^{1}_{x:\overline{n|}}=E(Z)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}\cdot{}_{k|}q_x \tag{2.2.17}$$

用换算函数替代，可得

$$(IA)^{1}_{x:\overline{n|}}=\frac{R_x-R_{x+n}-nM_{x+n}}{D_x} \tag{2.2.18}$$

对(x)投保离散型的按算术数列$\{n\}$递增的终身寿险，在式(2.2.17)中令 $n\to\infty$，则其趸缴纯保费(用符号$(IA)_x$表示)是

$$(IA)_x=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}\cdot{}_{k|}q_x \tag{2.2.19}$$

对上式作适当变形，容易得到

$$(IA)_x=\sum_{k=0}^{\infty}{}_{k|}A_x \tag{2.2.20}$$

从式(2.2.20)中可看出，按算术数列递增的终身寿险，实际上是由一系列延期定额终身寿险所构成的。

[例 2.2.5] 设年龄 30 岁的人，购买离散型的递增的 30 年期的定期寿险，保险利益是：被保险人在第一个保单年度内死亡，则给付 1000 元；在第二个保单年度内死亡，则给付 1100 元；在第三个保单年度内死亡，则给付 1200 元，依次类推，直到在第 30 个保单年度内死亡，则给付 3900 元。试求该保单的趸缴纯保费(预定年利率 $i=6\%$)。

解：依题意，所求的趸缴纯保费是

$$\begin{aligned}P&=900A^{1}_{30:\overline{30|}}+(IA)^{1}_{30:\overline{30|}}\times 100\\&=900\frac{M_{30}-M_{60}}{D_{30}}+100\frac{R_{30}-R_{60}-30M_{60}}{D_{30}}\\&=900\frac{14730.24-9301.69}{170037.90}+100\frac{520285.40-144299.70-30\times 9301.69}{170037.90}\\&=85.74(\text{元})\end{aligned}$$

2. 递减的 n 年定期寿险。对于按算术数列递减的离散型 n 年定期寿险，即若被保险人在第 k 个保单年度内死亡，给付$(n-k)$元的保险金$(k=0,1,2\cdots,n-1)$，则其相应的有关函数是

$$b_{k+1}=n-k \qquad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$
$$v_{k+1}=v^{k+1} \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$
$$Z=b_{K+1}v_{K+1}=\begin{cases}(n-K)v^{K+1} & (K=0,1,2,\cdots,n-1)\\0 & (K\geqslant n)\end{cases}$$

所以，该种保单的趸缴纯保费（用符号$(DA)^1_{x:\overline{n}|}$表示）是

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|}=E(Z)=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}\cdot{}_{k|}q_x \tag{2.2.21}$$

上式作适当变形，容易得到

$$\begin{aligned}(DA)^1_{x:\overline{n}|}&=\sum_{k=0}^{n-1}A^1_{x:\overline{n-k}|}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,{}_{k|}A^1_{x:\overline{1}|}\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

从式(2.2.22)可看出，这种递减的 n 年定期寿险是由一组定期寿险或延期 k 年的一年期定期寿险组合而成的。将式(2.2.21)用换算函数表示，可得

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|}=\frac{nM_x-(R_{x+1}-R_{x+n+1})}{D_x} \tag{2.2.23}$$

［例 2.2.6］ 设年龄 30 岁的人投保离散型递减的 20 年定期寿险，保险利益是：被保险人在第一保单年内死亡，给付保险金 5000 元；在第二保单年内死亡，给付 4900 元；在第三保单年内死亡，给付 4800 元，依次类推，直到在第 20 保单年内死亡，给付 3100 元。试求该保单的趸缴纯保费（预定年利率 $i=6\%$）。

解：依题意，所求的趸缴纯保费是

$$\begin{aligned}P&=3000A^1_{30:\overline{20}|}+100(DA)^1_{30:\overline{20}|}\\&=3000\frac{M_{30}-M_{50}}{D_{30}}+100\frac{20M_{30}-(R_{31}-R_{51})}{D_{30}}\\&=3000\frac{14730.24-11729.06}{170037.90}+100\frac{20\times14730.24(505555.10-239576.50)}{170037.90}\\&=69.79(\text{元})\end{aligned}$$

对于非均衡给付的延期寿险的趸缴纯保费留给读者去思考。

§ 2.3 连续型人寿保险模型

在上一节中，我们所讨论的寿险模型，其保险金（即保险给付）是在被保险人的未来寿命 $K=K(x)$时给付的；而本节讨论的寿险模型，其保险金是在被保险人的未来寿命 $T=T(x)$时给付，即在被保险人死亡时立即给付。在寿险实务中几乎所有保险都是如此。这就是所谓的连续型的人寿保险模型。

2.3.1 死亡保险

假设被保险人在投保（或签单）时的年龄为 x 岁，保险金在被保险人未来寿命 $T=T(x)$时的给付金额为 b_t，而 v_t 是在时刻 t 时给付 1 个单位金额在签单时的利息贴现系数，Z_T 是给付金额在签单时的现值。则现值随机变量

$$Z_T=b_Tv_T \tag{2.3.1}$$

对于(x)投保连续型的保险金额为1单位的n年期定期寿险，其有关函数是

$$b_t=\begin{cases}1, & (t\leqslant n)\\ 0, & (t>n)\end{cases}$$

$$v_t=v^t,\quad (t\geqslant 0)$$

$$Z_T=\begin{cases}v^T, & (T\leqslant n)\\ 0, & (T>n)\end{cases}$$

则其趸缴纯保费(用符号$\overline{A}^1_{x:\overline{n|}}$表示)是

$$\overline{A}^1_{x:\overline{n|}}=E(Z_T)=\int_0^n v^t\cdot {}_tp_x\mu_{x+t}dt \tag{2.3.2}$$

记$v=\exp(-\delta)$，其中δ称利力，则式(2.3.2)可表示为

$$\overline{A}^1_{x:\overline{n|}}=\int_0^n \exp(-\delta t)\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt \tag{2.3.3}$$

记　$${}^2\overline{A}^1_{x:\overline{n|}}=\int_0^n \exp(-2\delta t)\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt$$

则连续型的保险金额为1个单位的n年定期寿险现值随机变量Z_T的方差是

$$\begin{aligned}Var(Z_T)&=E(Z_T^2)-[E(Z_T)]^2\\&={}^2\overline{A}^1_{x:\overline{n|}}-(\overline{A}^1_{x:\overline{n|}})^2\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

对于(x)投保连续型的保险金额为1个单位的终身寿险，其趸缴纯保费(用符号$\overline{A}_x$表示)，可在式(2.3.2)中令$n\to+\infty$，得

$$\begin{aligned}\overline{A}_x&=\int_0^{+\infty} v^t\cdot {}_tp_x\mu_{x+t}dt\\&=\int_0^{+\infty}\exp(-\delta t)\cdot {}_tp_x\mu_{x+t}dt\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

记　${}^2\overline{A}_x=\int_0^{+\infty}\exp(-2\delta t)\cdot {}_tp_x\mu_{x+t}dt$。

对于(x)投保连续型的保额为1个单位的终身寿险，其现值随机变量Z_T的方差是

$$\begin{aligned}Var(Z_T)&=E(Z_T^2)-[E(Z_T)]^2\\&={}^2\overline{A}_x-(\overline{A}_x)^2\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

[例2.3.1]　设(x)的未来寿命$T=T(x)$的密度函数是

$$f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{80} & (0<t<80)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases}$$

利力为$\delta(\neq 0)$，给付1个单位保险金额的终身寿险的现值随机变量为Z_T，试计算：

(1) 趸缴纯保费；

(2) 随机变量Z_T的方差；

(3) 满足$P_r(Z\leqslant\zeta_{0.9})=0.9$的分位数$\zeta_{0.9}$。

解：依题意，则有

(1) $\overline{A}_x=\int_0^{80}\exp(-\delta t)\frac{1}{80}dt=\frac{1-\exp(-80\delta)}{80\delta}\quad(\delta\neq 0)$

${}^2\overline{A}_x=\int_0^{80}\exp(-2\delta t)\frac{1}{80}dt=\frac{1-\exp(-160\delta)}{160\delta}\quad(\delta\neq 0)$

(2) $Var(Z) = {}^2\overline{A}_x - (\overline{A}_x)^2$

$$= \frac{1-\exp(-160\delta)}{160\delta} - \left(\frac{1-\exp(-80\delta)}{80\delta}\right)^2 \qquad (\delta \neq 0)$$

(3) $h = \dfrac{\ln \zeta_{0.9}}{\ln v}$，$v = \exp(-\delta) < 1$，则

$$P_r(Z \leqslant \zeta_{0.9}) = P_r(v^T \leqslant \zeta_{0.9})$$
$$= P_r(T \geqslant h) = \int_h^{+\infty} f_T(t)\,dt$$
$$= \int_h^{+\infty} \frac{1}{80}dt = \frac{1}{80}(80-h) = 0.9$$

解之得：

$$h = 8，\text{即} \ln\zeta_{0.9} = 8\ln v$$

故 $$\zeta_{0.9} = v^8 = \exp(-8\delta) \qquad (\delta \neq 0)$$

保险金给付现值的随机变量 Z_T 的方差，对于考虑经营该险种业务的财务稳定性具有重要的指导意义。

下面，运用近似标准正态分布，通过风险业务量来确定保险在最初时的保险基金。

[例 2.3.2] 设有 100 个相互独立的年龄都是 x 岁的被保险人均投保保险金额为 10 元的连续型终身寿险，死力 $\mu_t = 0.04$，保险金将从按利力 $\delta = 0.06$ 计息的投资基金中支付。试计算该项基金在最初($t=0$)时，其数额至少有多大，才能保证从该项基金中足以支付每个被保险人死亡保险金的概率近似为 95%。

解：设 Z_j 表示第 j 个被保险人的死亡给付在投保时的现值随机变量，则

$$Z_j = 10v^T \qquad (T \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, 100)$$

依题意，这 100 个被保险人的死亡保险金额的现值总额 $Z = \sum_{j=1}^{100} Z_j$

其中，Z_1，Z_2，…，Z_{100}是相互独立的，且

$$E(Z_j) = 10\overline{A}_x = 10\int_0^{+\infty} \exp(-\mu t)\mu\exp(-\delta t)\,dt$$
$$= 10\frac{\mu}{\mu+\delta} = 4 \qquad (j = 1, 2, \cdots, 100)$$
$$E(Z_j^2) = 10^2 \cdot {}^2\overline{A}_x = 100\int_0^{+\infty} \exp(-2\delta t)\mu\exp(-\mu t)\,dt$$
$$= 100\frac{\mu}{\mu+2\delta} = 25 \quad (j = 1, 2, \cdots, 100)$$
$$Var(Z_j) = E(Z_j^2) - [E(Z_j)]^2$$
$$= 25 - 4^2 = 9 \qquad (j = 1, 2, \cdots, 100)$$

从而可得

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{100} E(Z_j) = 100 \times 4 = 400$$
$$Var(Z) = \sum_{j=1}^{100} Var(Z_j) = 100 \times 9 = 900$$

设该项基金在最初时的数额至少是 h 元，依题意，则

$$P_r\left(\frac{Z-E(Z)}{\sqrt{Var(Z)}}\leqslant\frac{h-E(Z)}{\sqrt{Var(Z)}}\right)=0.95$$

近似服从于标准正态分布 $N(0,1)$，则

$$\frac{h-400}{30}=1.645$$

故 $h=400+30\times1.645=449.35$(元)

即该项基金在最初时的数额至少要有 449.35 元，比所收取的趸缴纯保费建立的初始基金 400($=100\times4$)元多出 49.35 元，即超过趸缴纯保费基金的 12.34%。这说明，最初基金需有风险附加费(即安全附加费)的存在，即该基金超过保费总额的那部分(49.35 元)是安全附加基金。

2.3.2 两全保险与延期寿险

对于(x)投保连续型的保险金额为 1 个单位的 n 年期两全保险，其给付现值的随机变量

$$Z_T=\begin{cases}v^T & (T\leqslant n)\\ v^n & (T>n)\end{cases}$$

则趸缴纯保费(用符号$\overline{A}_{x:\overline{n}|}$表示)是

$$\begin{aligned}\overline{A}_{x:\overline{n}|}&=\int_0^n v^t\cdot {}_tp_x\mu_{x+t}dt+v^n\cdot {}_np_x\\&=\overline{A}^1_{x:\overline{n}|}+\overline{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\end{aligned}\tag{2.3.7}$$

记

$$\begin{aligned}{}^2\overline{A}_{x:\overline{n}|}=E(Z_T^2)&=\int_0^n v^{2t}\cdot {}_tp_x\mu_{x+t}dt+v^{2n}\cdot {}_np_x\\&=\int_0^n \exp(-2\delta t)\cdot {}_tp_x\mu_{x+t}dt+v^{2n}\cdot {}_np_x\end{aligned}$$

则连续型的保险金额为 1 个单位的 n 年期两全保险，其现值随机变量 Z 的方差是

$$Var(Z)={}^2\overline{A}_{x:\overline{n}|}-(\overline{A}_{x:\overline{n}|})^2\tag{2.3.8}$$

对于(x)投保连续型的保险金额为 1 个单位的延期 h 年的终身寿险，其给付现值的随机变量是

$$Z=\begin{cases}v^T & (T>h)\\ 0 & (T\leqslant h)\end{cases}$$

趸缴纯保费(用符号${}_{h|}\overline{A}_x$ 表示)是

$$\begin{aligned}{}_{h|}\overline{A}_x&=\int_h^{+\infty}v^t\cdot {}_tp_x\mu_{x+t}dt\\&=\int_h^{+\infty}\exp(-\delta t)\cdot {}_tp_x\mu_{x+t}dt\end{aligned}\tag{2.3.9}$$

记

$${}_{h|}{}^2\overline{A}_x=\int_h^{+\infty}\exp(-2\delta t)\cdot {}_tp_x\mu_{x+t}dt$$

则连续型的保险金额为 1 个单位的延期 h 年的终身寿险，其现值随机变量 Z 的方差是

$$Var(Z) = {}_{h|}{}^2\overline{A}_x - ({}_{h|}\overline{A}_x)^2 \tag{2.3.10}$$

类似地，记${}_{h|n}\overline{A}_x$，${}_{h|}\overline{A}_{x:\overline{n}|}$分别表示连续型的保险金额为1个单位的延期 h 年的 n 年期定期寿险和延期 h 年的 n 年期两全保险的趸缴纯保费，则

$${}_{h|n}\overline{A}_x = \int_h^{h+n} v^t \cdot {}_tp_x\mu_{x+t}dt \tag{2.3.11}$$

$${}_{h|}\overline{A}_{x:\overline{n}|} = {}_{h|n}\overline{A}_x + {}_{h|}\overline{A}_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \tag{2.3.12}$$

其中，${}_{h|}\overline{A}_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$表示延期 h 年的保险金额为1个单位的 n 年生存保险的趸缴纯保费。

［例 2.3.3］ 考察保险金额为1个单位的延期5年的终身寿险，设年龄为 x 岁的被保险人，其死力为常值 $\mu = 0.04$，利力 $\delta = 0.10$，Z 表示给付现值随机变量。试求：

（1）期望值 $E(Z)$；

（2）方差 $Var(Z)$；

（3）中位数 $\zeta_{0.5}$。

解：依题意可知，未来寿命 $T = T(x)$的密度函数是

$$f_T(t) = \mu\exp(-\mu t) \quad (t \geqslant 0)$$

（1）$E(Z) = {}_{5|}\overline{A}_x = \int_5^{+\infty} \exp(-\delta t)\mu\exp(-\mu t)dt$

$$= \frac{\mu}{\mu+\delta}\exp[-5(\mu+\delta)] = \frac{2}{7}\exp(-0.7) = 0.1419$$

$$E(Z^2) = \int_5^{+\infty} \exp(-2\delta t)\mu\exp(-\mu t)dt$$

$$= \frac{\mu}{\mu+2\delta}\exp[-5(\mu+2\delta)] = \frac{1}{6}\exp(-1.2)$$

$$= 0.0502$$

（2）$Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$

$$= 0.0502 - (0.1419)^2 = 0.0301$$

（3）依题意，知

$$Pr(Z=0) = Pr(T \leqslant 5) = \int_0^5 \mu\exp(-\mu t)dt$$

$$= 1 - \exp(-5\mu) = 1 - \exp(-0.2) = 0.1813$$

而 $$Pr(Z \leqslant \zeta_{0.5}) = 0.5 > 0.1813$$

所以 $$\zeta_{0.5} > 0$$

且 $$Pr(0 < Z \leqslant \zeta_{0.5}) = 0.5 - Pr(Z=0) = 0.3187$$

记 $$h = -10\ln\zeta_{0.5}$$

$$Pr(T \geqslant h) = Pr(0 < Z \leqslant \zeta_{0.5}) = 0.3187$$

而 $$Pr(T \geqslant h) = \int_h^{+\infty} \mu\exp(-\mu t)dt = \exp(-\mu h) = \exp(-0.04h)$$

即 $$\exp(-0.04h) = 0.3187$$

所以 $$\zeta_{0.5} = (0.3187)^{2.5} = 0.0573$$

2.3.3 非均衡给付保险

对于连续型的非均衡给付保险，本文仅讨论递增非均衡给付和递减非均衡给付中的两



种特殊情形。

1. 按算术数列续年递增的终身寿险。按算术数列$\{n\}$续年递增的连续型的终身寿险，可分为三种情况，其一是按年递增的终身寿险，其二是按年递增且每年递增 m 次的终身寿险，其三是按年连续递增的终身寿险。

(1)按年递增的终身寿险。按年递增终身寿险，其保险利益为：如被保险人在第一保单年度内死亡，则在死亡时立即给付保险金 1 元；在第二个保单年度内死亡，则在死亡时立即给付保险金 2 元；在第三个保单年度内死亡，则在死亡时立即给付保险金 3 元，依次类推。从而，该终身寿险的有关函数是

$$b_t = [t+1] \qquad (t \geqslant 0)$$

$$v_t = v^t \qquad (t \geqslant 0)$$

$$Z = b_T v_T = [T+1]v^T \qquad (T \geqslant 0)$$

则其趸缴纯保费(用符号$(I\bar{A})_x$ 表示)是

$$\begin{aligned}(I\bar{A})_x &= E(Z) = \int_0^{+\infty}[t+1]v^t{}_tp_x\mu_{x+1}dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}k\int_{k-1}^{k}v^t{}_tp_x\mu_{x+t}dt\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

(2)按年度递增且每年递增 m 次的终身寿险。按年递增且每年递增 m 次的终身寿险，是将每一个保单年度分为均等的 m 个时间段，其保险利益是：如被保险人在第一个保单年的第一个$\frac{1}{m}$年内死亡，则立即给付保险金$\frac{1}{m}$元，在第一个保单年的第二个$\frac{1}{m}$年(即$\frac{1}{m}$年至$\frac{2}{m}$年之间)内死亡，则立即给付保险金$\frac{2}{m}$元……在第一个保单年的第 m 个$\frac{1}{m}$年内死亡，则立即给付保险金 1(即$\frac{m}{m}$)元；在第二个保单年的第一个$\frac{1}{m}$年内死亡，则立即给付保险金$(1+\frac{1}{m})$元，在第二个保单年的第二个$\frac{1}{m}$年内死亡，则立即给付保险金$(1+\frac{2}{m})$元，依次类推。则该终身寿险的有关函数是

$$b_t = \frac{[1+mt]}{m} \qquad (t \geqslant 0)$$

$$v_t = v^t \qquad (t \geqslant 0)$$

$$Z = b_T v_T = \frac{v^T[1+mT]}{m} \qquad (T \geqslant 0)$$

其趸缴纯保费用符号$(I^{(m)}\bar{A})_x$ 表示，则

$$(I^{(m)}\bar{A})_x = \int_0^{+\infty} v^t \frac{[1+mt]}{m}{}_tp_x\mu_{x+t}dt \tag{2.2.14}$$

(3)按年连续递增的终身寿险。按年连续递增的即期终身寿险，其保险利益是：如被保险人在时刻 $t(t>0)$时死亡，则给付死亡保险金 t 元。故该终身寿险的现值随机变量

$$Z = Tv^T \qquad (T \geqslant 0)$$

其趸缴纯保费用符号$(\bar{I}\bar{A})_x$ 表示，则

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^{+\infty} t\, v^t{}_tp_x\mu_{x+t}dt \tag{2.3.15}$$

将式(2.3.15)改写成

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^t ds\right)v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt$$
$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^t v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt\right)dt$$

将上式交换积分的次序，可得

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^{+\infty}\left(\int_s^{+\infty} v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt\right)ds$$
$$= \int_0^{+\infty} {}_{s|}\bar{A}_x ds \tag{2.3.16}$$

式(2.3.16)表明：按年连续递增的终身寿险保单等价于由一系列的延期的保险金额为1元的连续型终身寿险保单所组成。

同样地，设$(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}$表示按年递增的 n 年定期寿险的趸缴纯保费，则

$$(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n [t+1]v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k\int_{k-1}^{k} v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt \tag{2.3.17}$$

2. 按年递减的 n 年定期寿险。按年递减的 n 年定期寿险，其保险利益是：如被保险人在第一个保单年内死亡，则立即给付保险金 n 元，在第二个保单年内死亡，则立即给付保险金$(n-1)$元，依次类推，在第 n 个保单年内死亡，则立即给付保险金 1 元。则该保险的有关函数是

$$b_t = \begin{cases} n-[t] & (t\leqslant n) \\ 0 & (t>n) \end{cases}$$
$$v_t = v^t \qquad (t\geqslant 0)$$
$$Z = b_Tv_T = \begin{cases} (n-[t])v^T & (T\leqslant n) \\ 0 & (T>n) \end{cases}$$

其趸缴纯保费用符号$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}$表示，则

$$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n (n-[t])v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\int_k^{k+1} v^t\,{}_tp_x\mu_{x+1}dt \tag{2.3.18}$$

对于非均衡给付的延期寿险保单的趸缴纯保费留给读者讨论。

2.3.4 趸缴纯保费的换算函数表示式

与离散型寿险模型类似，本节引入连续的换算函数来表示连续型各寿险的趸缴纯保费。记

$$\bar{C}_x = \int_0^1 D_{x+t}\mu_{x+t}dt$$
$$\bar{M}_x = \sum_{y=x}^{\infty}\bar{C}_y = \bar{C}_x + \bar{C}_{x+1} + \cdots$$

$$\overline{R}_x = \sum_{y=x}^{\infty} \overline{M}_y = \overline{M}_x + \overline{M}_{x+1} + \cdots$$

其中，$D_{x+t} = v^{x+t} l_{x+t}\quad (t \geqslant 0)$。

对于(x)投保连续型的保险金额为1单位的n年定期寿险，根据式(2.2.2)可知，其趸缴纯保费

$$\begin{aligned}
\overline{A}^1_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n v^t\, {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \int_0^n v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \mu_{x+t} dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{v^x l_x} v^{x+t} l_{x+t} \mu_{x+t} dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{v^x l_x} \int_k^{k+1} v^{x+t} l_{x+t} \mu_{x+t} dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{v^x l_x} \int_0^1 v^{x+k+s} l_{x+k+s} \mu_{x+k+s} ds \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{D_x} \overline{C}_{x+k} = \frac{1}{D_x} (\overline{C}_x + \overline{C}_{x+1} + \cdots + \overline{C}_{x+n-1}) \\
&= \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n}}{D_x}
\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

类似地，我们可以得出

$$\left.\begin{aligned}
\overline{A}_x &= \frac{\overline{M}_x}{D_x} \\
\overline{A}_{x:\overline{n}|} &= \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \\
{}_{h|}\overline{A}_x &= \frac{\overline{M}_{x+h}}{D_x} \\
{}_{h|n}\overline{A}_x &= \frac{\overline{M}_{x+h} - \overline{M}_{x+h+n}}{D_x} \\
{}_{h|}\overline{A}_{x:\overline{n}|} &= \frac{\overline{M}_{x+h} - \overline{M}_{x+h+n} + D_{x+h+n}}{D_x} \\
(I\overline{A})_x &= \frac{\overline{R}_x}{D_x} \\
(I\overline{A})^1_{x:\overline{n}|} &= \frac{\overline{R}_x - \overline{R}_{x+n} - n\overline{M}_{x+n}}{D_x} \\
(D\overline{A})^1_{x:\overline{n}|} &= \frac{n\overline{M}_x - (\overline{R}_{x+1} - \overline{R}_{x+n+1})}{D_x}
\end{aligned}\right\} \tag{2.3.20}$$

§2.4 死亡均匀分布假设下的寿险模型

本节讨论是在死亡均匀分布的假设条件下，连续型寿险模型的趸缴纯保费与相对应的

离散型寿险模型之间的关系。

2.4.1　$\bar{A}_x$与A_x之间的关系

以连续型的保险金额为1个单位的终身寿险为例，在死亡均匀分布的假设条件下，讨论$\bar{A}_x$与A_x之间的关系

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_x &= E(Z) = E(v^T) = E(v^{K+S}) = E(v^{K+1}\cdot v^{S-1}) \\
&= E(v^{S-1})\cdot E(v^{K+1}) \\
&= \int_0^1 v^{S-1}dS\cdot A_x = (v^{S-1}/\ln v\,|_0^1\cdot A_x \\
&= -\frac{i}{\ln v}\cdot A_x = \frac{i}{\delta}\cdot A_x
\end{aligned}
\tag{2.4.1}
$$

同理，在死亡均匀分布的假设条件下，我们可得

$$
\left.
\begin{aligned}
&\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}\cdot A^1_{x:\overline{n}|} \\
&\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}\cdot A^1_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|} \\
&{}_{h|}\bar{A}_x = \frac{i}{\delta}\cdot {}_{h|}A_x \\
&{}_{h|n}\bar{A}_x = \frac{i}{\delta}\cdot {}_{h|n}A_x \\
&{}_{h|}\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}\cdot {}_{h|n}\bar{A}_x + {}_{h|}A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \\
&(I\bar{A})_x = \frac{i}{\delta}\cdot (IA)_x \\
&(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}\cdot (IA)^1_{x:\overline{n}|} \\
&(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}\cdot (IA)^1_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.4.2}
$$

2.4.2　实例

[例2.4.1]　设年龄为40岁的人投保连续型的递减的10年定期寿险，其保险利益是：若被保险人在第一个保单年内死亡，则立即给付保险金10000元；若在第二个保单年内死亡，则立即给付保险金9900元；在第三个保单年内死亡，则立即给付保险金9800元，依次递减，直至在第十个保单年内死亡，则立即给付保险金9100元。试在死亡均匀分布假设条件下求其趸缴纯保费(预定年利率 $i=6\%$)。

解：此寿险保单可看作由保险金额为9000元的10年定期寿险与逐年递减100元的10年定期寿险组合而成。

$$
\begin{aligned}
(DA)^1_{40:\overline{10}|} &= \frac{10M_{40}-(R_{41}-R_{51})}{D_{40}} \\
&= \frac{10\times 13451.35-(365123.80-239576.50)}{93942.98} \\
&= 0.0954430
\end{aligned}
$$

$$A_{40:\overline{10|}}^{1}=\frac{M_{40}-M_{50}}{D_{40}}$$
$$=\frac{13451.35-11729.06}{93942.98}$$
$$=0.018333$$

因 $i=6\%=0.06$

$$\delta=ln(1+0.06)=0.058269$$

故在死亡均匀分布的假设条件下，所求的趸纯保费是

$$P=9000\bar{A}_{40:\overline{10|}}^{1}+100(D\bar{A})_{40:\overline{10|}}^{1}$$
$$=\frac{i}{\delta}[9000A_{40:\overline{10|}}^{1}+100(DA)_{40:\overline{10|}}^{1}]$$
$$=1.029709\times(9000\times0.018333+100\times0.954430)$$
$$=268.18(\text{元})$$

§2.5 递推方程式

人寿保险模型给付保险金现值的期望值或均值(趸缴纯保费)，已从其有关的表达式中直接导出。本节仅以定额终身寿险的趸缴纯保费为例，导出其趸缴纯保费的递推方程式。

2.5.1 离散型终身寿险趸缴保费的递推方程式

对于离散型的保险金额为 1 元的终身寿险，其趸缴纯保费

$$A_x=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\cdot{}_{k|}q_x=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\cdot{}_kp_x\cdot q_{x+k}$$
$$=vq_x+\sum_{k=1}^{\infty}v^{k+1}{}_kp_x\cdot q_{x+k}$$
$$=vq_x+v\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}p_x\cdot{}_kp_{x+1}\cdot q_{x+1+k}$$
$$=vq_x+vp_x\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\cdot{}_kp_{x+1}\cdot q_{x+1+k}$$
$$=vq_x+vp_x\cdot A_{x+1}$$

于是可得到

$$A_x=1\cdot vq_x+A_{x+1}\cdot vp_x \tag{2.5.1}$$

式(2.5.1)的直观含义是：年龄为 x 岁的人以趸缴纯保费 A_x 元购买离散型保险金额为 1 元的终身寿险，所得到的保险利益是，如被保险人在第一个保单年度内死亡，则在该保单年度末时给付保险金 1 元；如被保险人在第一个保单年度末时仍生存，则保险人在此时以金额 A_{x+1} 元为该被保险人购买一张离散型保险金额为 1 元的终身寿险保单，作为对该被保险人在 $x+1$ 岁时的生存“给付”。

若在式(2.5.1)中用 $(1-q_x)$ 替代 p_x，且两边乘以 $(1+i)l_x$，可得：

$$(1+i)l_xA_x = l_xA_{x+1} + d_x(1-A_{x+1}) \tag{2.5.2}$$

式(2.5.2)更明显地表明：对于年龄为 x 岁的 l_x 个被保险人，每人所缴纳的 A_x 元建立的基金 l_xA_x 以年利率 i 积存一年后，其本利和正好是 $(1+i)l_xA_x$ 元。这一数额用于两部分支出：其一是在第一个保单年度末，对 l_x 个被保险人均给付 A_{x+1} 元；其二是对在第一个保单年度内死亡者，每人再给付 $(1-A_{x+1})$ 元。两项合计 $A_{x+1}+(1-A_{x+1})=1$。而对于在第一个保单年度末时仍生存者，其分得的 A_{x+1} 元正好可购买一张保险金额为 1 元的离散型的终身寿险保单。

若在式(2.5.2)两边乘以 v^{x+1}/l_x 可得：

$$v^xA_x - v^{x+1}A_{x+1} = v^{x+1}q_x(1-A_{x+1})$$

上式两边求和，可得

$$A_x = \sum_{y>x}(1-A_{y+1})v^{y-x+1}q_y$$

这表明：年龄为 x 岁的被保险人，其趸缴纯保费 A_x 等于其未来所有年份的保险成本的现值之和。

同理，在式(2.5.2)两边除以 l_x，可得：

$$A_{x+1} - A_x = iA_x - q_x(1-A_{x+1}) \tag{2.5.3}$$

式(2.5.3)称为离散型终身寿险趸缴纯保费的递推方程式，也可称差分方程式。

2.5.2　连续型终身寿险趸缴纯保费的微分方程式

对于连续型保险金额为 1 个单位的终身寿险，其趸缴纯保费的微分方程式是

$$\frac{d}{dx}(\bar{A}_x) = \delta\bar{A}_x - \mu_x(1-\bar{A}_x) \tag{2.5.4}$$

事实上，对于任意 $h>0$，都有

$$\begin{aligned}
\bar{A}_x &= \bar{A}^{1}_{x:\overline{h}|} + {}_{h|}\bar{A}_x \\
&= \bar{A}^{1}_{x:\overline{h}|} + A_{x:\overline{h}|}^{\ \ 1}\bar{A}_{x+h} \\
&= \int_0^h v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt + v^h\,{}_hp_x\cdot\bar{A}_{x+h}
\end{aligned}$$

$$\bar{A}_{x+h} - \bar{A}_x = -\int_0^h v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt + (1-v^h\,{}_hp_x)\cdot\bar{A}_{x+h}$$

由于

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to0}\frac{1-v^h\,{}_hp_x}{h}\bar{A}_{x+h} &= -\lim_{h\to0}\frac{v^h\,{}_hp_x-1}{h}\cdot\bar{A}_{x+h} \\
&= -\frac{d}{dt}(v^t\,{}_tp_x)\Big|_{t=0}\cdot\bar{A}_x = (\delta+\mu_x)\cdot\bar{A}_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_0^h v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt &= \frac{d}{ds}\int_0^s v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt\Big|_{s=0} \\
&= (v^s\,{}_sp_x\mu_{x+s})\Big|_{s=0} = \mu_x
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to0}\frac{\bar{A}_{x+h}-\bar{A}_x}{h} &= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_0^h v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt + \lim_{h\to0}\frac{1-v^h\,{}_hp_x}{h}\bar{A}_{x+h} \\
&= -\mu_x + (\delta+\mu_x)\cdot\bar{A}_x
\end{aligned}$$

即 $$\frac{d}{dx}(\overline{A}_x) = -\mu_x + (\delta + \mu_x)\cdot\overline{A}_x$$

故 $$\frac{d}{dx}(\overline{A}_x) = \delta\overline{A}_x - \mu_x(1 - \overline{A}_x)$$

对于其他类型的寿险保单趸缴纯保费的差分方程式或微分方程式，留给读者自行讨论。

习 题 二

1. 设年龄为35岁的人，购买一张保险金额为1000元的5年定期寿险保单，保险金额于被保险人死亡所处的保险年度末支付。试按附录II(A)中的生命表及年利率 $i=0.06$，计算：

(1) 该保单的趸缴纯保费；

(2) 该保单自35岁至39岁各年龄的自然保费之总额；

(3) (1)与(2)的结果何以不同?

2. 设 $A_x=0.25$，$A_{x+20}=0.40$，$A_{x:\overline{20|}}=0.55$。试计算：

(1) $A^{1}_{x:\overline{20|}}$；

(2) $A_{x:\overset{1}{\overline{20|}}}$。

3. 已知 $l_x=100-x$，$0\leqslant x\leqslant 100$，年利率 $i=0.05$。试计算：

(1) $A_{x:\overset{1}{\overline{25|}}}$；

(2) $A^{1}_{x:\overline{25|}}$。

4. 试证(这里 c_k 是 k 岁时的自然保费)：

(1) $A^{1}_{x:\overline{n|}} = c_x + c_{x+1}A_{x:\overset{1}{\overline{1|}}} + c_{x+2}A_{x:\overset{1}{\overline{2|}}} + \cdots + c_{x+n-1}A_{x:\overset{1}{\overline{n-1|}}}$；

(2) $A_x = c_x + c_{x+1}A_{x:\overset{1}{\overline{1|}}} + c_{x+2}A_{x:\overset{1}{\overline{2|}}} + \cdots$；

5. 试证：

(1) $D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \cdots {}_nD_{x+n-1} = S_x - S_{x+n} - nM_{x+n}$；

(2) $C_x + 2C_{x+1} + 3C_{x+2} + \cdots {}_nC_{x+n-1} = R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}$。

6. 试证：

(1) $(DA)^{1}_{x:\overline{n|}} = \dfrac{nM_x - (R_{x+1} - R_{x+n+1})}{D_x}$；

(2) ${}_{n|}(IA)_x = \dfrac{R_{x+n}}{D_x}$。

7. 设现年30岁的人，购买一张保险金额为4500元的30年定期寿险保单，保险金额于死亡者所处的保单年度末支付，试用附录II(A)的换算表，计算该保单的趸缴纯保费。

8. 现年45岁的人，缴付趸缴纯保费5000元，购买一张20年定期寿险保单，保险金额于死亡者所处的保单年度支付，试求该保单的保险金额。

9. 现年36岁的人，购买了一张离散型的变额终身寿险保单，保单利益是：若被保险人在10年内死亡，则给付数额为15000元；若10年以后死亡，则给付数额为20000元。试求其趸缴纯保费。

10. 年龄 40 岁的人，以现金 10000 元购买一离散型的寿险保单，并规定：若被保险人在 5 年内死亡，则给付数额为 R 元。试求保险金额 R。

11. 设年龄为 50 岁的人，购买一离散型的寿险保单，并规定：若被保险人在 70 岁以前死亡，则给付数额为 3000 元；若至 70 岁时仍生存，则给付金额为 1500 元。试求该寿险保单的趸缴纯保费。

12. 设年龄为 30 岁，购买一离散型的变额终身寿险保单，并规定：若被保险人在第一个保单年度内死亡，则给付 10000 元；若在第二个保单年度内死亡，则给付 9700 元；若在第三个保单年度内死亡，则给付 9400 元，每年递减 300 元，直至减到 4000 元为止，以后即维持此一定额。试求其趸缴纯保费。

13. 设以下各式表示其寿险保单的趸缴纯保费，试说明各寿险保单的保险利益：

(1) $\dfrac{1000(M_x+2R_{x+1})}{D_x}$

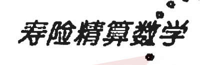
(2) $\dfrac{1000(M_x-M_{x+10}+2D_{x+10})}{D_x}$

(3) $\dfrac{1000(R_{x+5}-R_{65})}{D_x}$

14. 现有一份在 0 岁签发的终身寿险保单，保险金额于死亡者所处的保单年度末支付，保单的死亡给付数额与死亡年龄之关系如下表：

死亡年龄(岁)	死亡给付数额(元)
0	1000
1	2000
2	4000
3	6000
4	8000
5～20	10000
21 及 21 以上	50000

试用换算符号表示该份寿险保单的趸缴纯保费。



第三章

生存年金的精算现值

本章主要内容：本章以生命表的预定生存率和预定年利率为基础，在运用现时支付法和总额支付法的基础上，讨论离散型生存年金和连续型生存年金的精算现值。并对完全期末年金和比例期初年金作出解释，得出离散生存年金精算现值的递推方程式。

本章主要词汇：生存年金　现时支付法　总额支付法　完全期末　比例期初　精算现值

§3.1　生存年金概述

3.1.1　生存年金的概念与种类

生存年金是指按预先约定的金额，以一定的时间为周期绵延不断地进行一系列的给付，且这些给付必须以原指定的领取人的生存为前提条件，一旦原指定的领取人死亡，或预先约定给付期届满时，给付即宣告结束。图 3.1 给出了本章生存年金结构。

生存年金在人寿保险、退休金体系、残疾保险及抚恤保险中均起着重要作用。如在人寿保险中保险费通常是以生存年金的方式分期缴纳的，在退休金体系中退休金通常是以生存年金的方式分期给付的。

3.1.2　精算现值的计算方法

上一章我们介绍了保险金额为 1 个单位的 n 年生存保险，其给付保险金现值的期望

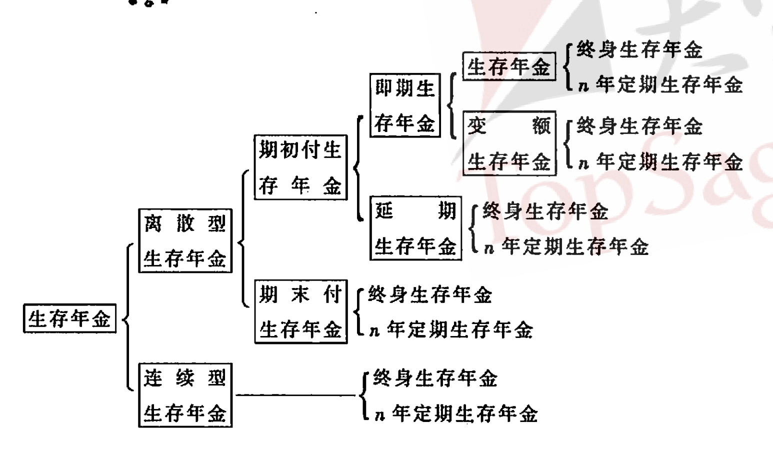


图 3.1 结构示意图

称为趸缴纯保费(这是与保险相联的缘故)。而在生存年金中，n 年期生存保险的期望现值 $E(Z)$(即趸缴纯保费)称为精算现值。“精算”一词意味着除含利率外，还含有死亡率等其他因素。因此，在生存年金中，保险金额为 1 个单位的 n 年生存保险的精算现值 $E(Z)$ 用符号 ${}_nE_x$ 表示，即

$${}_nE_x = v^n\ {}_np_x$$

对于生存年金的精算现值,其计算方法有两种:其一是现时支付法,其二是总额支付法。

现时支付法的计算步骤是:

- 求出时刻 t 时生存年金的给付数额;
- 确定时刻 t 时给付数额的精算现值;
- 对给付年金的精算现值按所有可能的给付时间进行相加或积分。

总额支付法的计算步骤是:

- 求出从开始支付至死亡或停止支付这段时间 t 内所有年金给付额的现值，这一现值仅与利率有关;
- 将求出的现值乘以相应的死亡概率或概率密度;
- 对第二步得到的结果按所有可能的死亡时间 t 进行相加或积分。

§3.2 离散型生存年金

离散型生存年金是指年金的领取人每次领取年金的时间间隔是离散的，如按每年、每半年、每季度、每月来进行的。离散型生存年金还分为“期初付”和“期末付”两种情形。其中，期初付生存年金在个人寿险中得以广泛应用，大多数个人寿险的保险费就是按期初付生存年金的方式分期缴纳保险费的。

3.2.1 按年付的定额生存年金

按年付生存年金是以年为时间间隔，每年支付一次，每次支付的金额均相等的生存年

金。我们以期初付的定额的终身生存年金为例，考虑其生存年金的精算现值。

设年龄为 x 岁的生存者在每个年度初领取年金额为 1 个单位的终身生存年金(即期初付终身生存年金)的精算现值，用符号 $\ddot{a}_x$ 表示，预定年利率为 i，利用现时支付法，则

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_kp_x \tag{3.2.1}$$

将 ${}_kp_x = l_{x+k}/l_x$ 代入式(3.2.1)，整理可得

$$l_x\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k l_{x+k} \tag{3.2.2}$$

式(3.2.2)表明：年龄为 x 岁的 l_x 个生存者，若每人缴纳 $\ddot{a}_x$ 元建立一笔基金(基金总额为 $l_x\ddot{a}_x$ 元)，并按预定年利率 i 计息积存，则可使该群体中生存到 $x+k$ 岁的 l_{x+k} 个人，每人获得 1 元的金额($k=0,1,2,\dots$)。

若利用总额支付法，则期初付年金额为 1 个单位的终身生存年金支付的现值

$$\overline{Y} = \ddot{a}_{\overline{K+1|}} = \sum_{j=0}^{K} v^j$$

于是，有

$$\ddot{a}_x = E(\overline{Y}) = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \cdot {}_{k|}q_x \tag{3.2.3}$$

交换求和的顺序，则式(3.2.3) 可转化为

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_{k+1}p_x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_x\end{aligned}$$

这说明：式(3.2.1)与式(3.2.3)是等同的。同时，也表明现时支付法与总额支付法计算精算现值的结果是相同的。

若在式(3.2.1)中引入换算函数，则可以得

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \tag{3.2.4}$$

现在，我们来考察期初付年金额为 1 个单位的终身生存年金现值 $\overline{Y} = \ddot{a}_{\overline{K+1|}}$ 的方差，根据方差的性质，则

$$\begin{aligned}Var(a_{\overline{K+1|}}) &= Var\left(\frac{1-v^{k+1}}{d}\right) \\ &= \frac{1}{d^2}Var(v^{k+1}) = \frac{1}{d^2}[{}^2A_x - (A_x)^2]\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

下面，我们考察 $\ddot{a}_x$ 与 A_x 之间的关系式。事实上

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= E(\ddot{a}_{\overline{K+1|}}) = E\left(\frac{1-v^{K+1}}{d}\right) \\ &= \frac{1}{d}[1-E(v^{K+1})] = \frac{1}{d}(1-A_x)\end{aligned}$$

故

$$\ddot{a}_x = \frac{1}{d}(1-A_x) \tag{3.2.6}$$

或

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x \tag{3.2.7}$$

式(3.2.7)表明：年龄为 x 岁的生存者，在预定年利率为 i 的条件下，只要缴纳金额 1 元，便可享受期初付的年金额为 d 元的终身生存年金，而一旦死亡，还可在死亡的年度末获得 1 元的死亡保险金。

若从一般的投资角度来解释，即(x)现在投资资金 1 元，在年利率 i 的条件下，可在(x)生存时，其每年的年初均可获得回报 d 元，而(x)一旦死亡，则在其死亡的年度末偿还其投资的本金 1 元。

[例 3.2.1]　一份金额为 1 元的期初付终生生存年金从 90 岁开始给付，其生存模型为

x	90	91	92	93
l_x	100	72	39	0

且已知 ${}^2A_{90} = 0.785525$ 和 $i = 0.6$，求该年金的精算现值 $E(Y)$和方差 $Var(Y)$

解：(1) $\ddot{a}_{90} = \sum_{k=0}^{w-x-1} 1 \cdot v^k \cdot {}_kp_{90}$

$$= 1 \cdot \left(\frac{1}{1.06}\right)^0 \cdot \frac{100}{100} + 1 \cdot \left(\frac{1}{1.06}\right)^1 \cdot \frac{72}{100} + 1 \cdot \left(\frac{1}{1.06}\right)^2 \cdot \frac{39}{100}$$
$$= 2.026344$$

(2) 由式(3.2.7)知

$$A_{90} = 1 - d\ddot{a}_{90} = 1 - \left(\frac{6}{106}\right)2.026344$$
$$= 0.885301$$

所以

$$Var(Y) = \frac{1}{d^2}({}^2A_{90} - (A_{90})^2) = \left(\frac{106}{6}\right)^2 \cdot 0.001766$$
$$= 0.551188$$

对于期末付年金额为 1 元的终身生存年金，其精算现值用 a_x 表示。运用类似的方法，容易得到

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \tag{3.2.8}$$

$$Var(a_{\overline{K}|}) = \frac{1}{d^2}[{}^2A_x - (A_x)^2] \tag{3.2.9}$$

$$a_x = \frac{1}{i}[1 - (1+i)A_x] \tag{3.2.10}$$

或

$$1 = ia_x + (1+i)A_x \tag{3.2.11}$$

关于式(3.2.11)的含义留给读者作解释。

类似地，对于期初付的年金额为 1 个单位的 n 年定期生存年金，其精算现值用符号 $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$表示，则

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_kp_x \tag{3.2.12}$$

或

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x} \tag{3.2.13}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\frac{1}{d}(1-A_{x:\overline{n}|}) \tag{3.2.14}$$

$$1=d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}+A_{x:\overline{n}|} \tag{3.2.15}$$

对于延期 h 年的期初付年金额为 1 个单位的终身生存年金和 n 年定期生存年金，其精算现值分别用符号 ${}_{h|}\ddot{a}_x$ 和 ${}_{h|n}\ddot{a}_x$ 表示，则

$${}_{h|}\ddot{a}_x=\sum_{k=h}^{\infty}v^k\cdot{}_kp_x \tag{3.2.16}$$

或

$${}_{h|}\ddot{a}_x=\frac{N_{x+h}}{D_x} \tag{3.2.17}$$

和

$${}_{h|n}\ddot{a}_x=\sum_{k=h}^{h+n-1}v^k\,{}_kp_x \tag{3.2.18}$$

或

$${}_{h|n}\ddot{a}_x=\frac{N_{x+h}-N_{x+h+n}}{D_x} \tag{3.2.19}$$

我们不难证明，有如下关系式成立

$$\begin{aligned}{}_{h|}\ddot{a}_x&=\ddot{a}_x-\ddot{a}_{x:\overline{h}|}\\&={}_hE_x\cdot\ddot{a}_{x+h}\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

$$\begin{aligned}{}_{h|n}\ddot{a}_x&=\ddot{a}_{x:\overline{n+h}|}-\ddot{a}_{x:\overline{h}|}\\&={}_hE_x\cdot\ddot{a}_{x+h:\overline{n}|}\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

[例 3.2.2] 一份于 60 岁签发的年给付额为 1 元并且延期 10 年给付的生存年金，已知死亡率服从 de moivre 分布且 $\omega=100$、$i=0$，试计算该年金给付总额超过该年金精算现值的概率。

解：由于死亡率服从 de moivre 分布且 $\omega=100$，得到

$$l_x=\omega-x=100-x$$

$${}_tp_{60}=l_{60+t}/l_{60}=(40-t)/40$$

$$\begin{aligned}{}_{10|}\ddot{a}_{60}&=\sum_{k=10}^{40}1\cdot\frac{40-k}{40}\cdot1\\&=\frac{30+29+\cdots+1}{40}=\frac{30\cdot31}{2\cdot40}\\&=11.63\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&Pr(K-9>11.63)=Pr(K>20.63)\\&=Pr(K\geqslant21)+Pr(T\geqslant21)=\frac{l_{81}}{l_{60}}=\frac{19}{40}\\&=0.475\end{aligned}$$

3.2.2 每年分 *m* 次支付的生存年金

上面，我们所讨论的是每年支付一次的定额生存年金的精算现值。而在实际业务中，

大多数个人生存年金通常是按月或按季或按每半年等方式来支付的。因此，讨论每年分 m 次支付的定额生存年金有重要的现实意义。

下面，我们以每年分 m 次支付，每次支付额为 $1/m$ 元的期初付终身生存年金为例，其精算现值用符号 $\ddot{a}_x^{(m)}$ 表示，根据现时支付法，则

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} v^{k/m} \cdot {}_{k/m}p_x \tag{3.2.22}$$

将按上述方式给付年金的现值记作 $\overline{Y}$，则

$$\overline{Y} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+S}|} \quad S = \left(\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \cdots, \frac{m-1}{m}; \ K=0,1,2,\cdots\right)$$

根据总额支付法，则

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)} &= E(\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+S}|}) = E\left(\frac{1-v^{K+S}}{d^{(m)}}\right) \\ &= \frac{1}{d^{(m)}}(1 - A_x^{(m)})\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

其中，$d^{(m)}$满足关系式

$$(1-d) = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m, \ d \text{ 是年贴现率。}$$

故
$$1 = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)}。 \tag{3.2.24}$$

合并式(3.2.7)与式(3.2.24)，可以得

$$d\ddot{a}_x + A_x = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)}$$

得
$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{d \cdot \ddot{a}_x}{d^{(m)}} + \frac{1}{d^{(m)}}(A_x - A_x^{(m)}) \\ &= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}\ddot{a}_x + \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|}(A_x - A_x^{(m)}) \\ &= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}\ddot{a}_x - \frac{s^{(m)}_{\overline{1}|} - 1}{d^{(m)}}A_x\end{aligned}$$

由于
$$d^{(m)}\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|} = d$$

所以
$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{1 - s^{(m)}_{\overline{1}|}(1 - d\ddot{a}_x)}{d^{(m)}} \\ &= s^{(m)}_{\overline{1}|}\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}\ddot{a}_x - \frac{s^{(m)}_{\overline{1}|} - 1}{d^{(m)}}\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

若其尾龄服从死亡均匀分布，则

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}}A_x$$

从而，式(3.2.25)在死亡均匀分布假设条件下，有

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x + \beta(m)$$

其中，$\alpha(m) = s^{(m)}_{\overline{1}|}\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|} = \dfrac{id}{i^{(m)}d^{(m)}}$，$\beta(m) = \dfrac{s^{(m)}_{\overline{1}|} - 1}{d^{(m)}} = \dfrac{i^{(m)} - i}{i^{(m)}d^{(m)}}$。

或

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\frac{N_x}{D_x} + \beta(m) \tag{3.2.26}$$

式(3.2.26)在高利率与低死亡率的特殊情况下常被采用，而在一般情况下，通常采用

$\ddot{a}_x^{(m)}$ 的传统近似计算公式，即

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \tag{3.2.27}$$

下面，我们介绍一下式(3.2.27)的来历，首先根据恒等式

$$_{0|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - 0$$

和

$$_{1|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - 1$$

引人线性插值的近似计算式，即

$$_{\frac{k}{m}|}\ddot{a}_x \approx \ddot{a}_x - \frac{k}{m},\ (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$$

故

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{1}{m}\left({}_{0|}\ddot{a}_x + {}_{\frac{1}{m}|}\ddot{a}_x + {}_{\frac{2}{m}|}\ddot{a}_x + \cdots + {}_{\frac{m-1}{m}|}\ddot{a}_x\right)\\ &\approx \frac{1}{m}\left[\ddot{a}_x + \left(\ddot{a}_x - \frac{1}{m}\right) + \left(\ddot{a}_x - \frac{2}{m}\right) + \cdots + \left(\ddot{a}_x - \frac{m-1}{m}\right)\right]\\ &= \ddot{a}_x - \frac{1+2+\cdots+(m-1)}{m^2}\\ &= \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\end{aligned}$$

[例 3.2.3] 试根据附录 I(C)的生命表和预定年利率 $i = 6\%$，并在死亡均匀分布的假设条件下，计算到 60 岁时起退休者每月领取 1000 元的期初付终身生存年金的精算现值。

解：由于年利率 $i = 6\%$，则年贴现率

$$d = \frac{i}{1+i} = 0.0566$$

从而，月利率和月贴现率分别是

$$i^{(12)} = 0.0584$$
$$d^{(12)} = 0.0581$$

则

$$\alpha(12) = 1.00028$$
$$\beta(12) = -0.468119$$

故

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{60}^{(12)} &= \alpha(12)\ddot{a}_{60} + \beta(12)\\ &= 1.00028 \times 11.49027 - 0.468119\\ &= 11.02537\end{aligned}$$

故所求生存年金的精算现值是

$$P = 12 \times 1000 \times \ddot{a}_{60}^{(12)} = 132304.44(\text{元})$$

若采用传统的近似计算公式，则

$$\begin{aligned}P &= 12 \times 1000 \times \ddot{a}_{60}^{(12)}\\ &= 12000 \times \left(11.49027 - \frac{11}{24}\right)\\ &= 132383.28(\text{元})\end{aligned}$$

从例 3.2.3 中可以看出，我们没有理由希望两者得出相同的结果。不过，此例显示出两者的差异相对较小。

对于每年分 m 次支付、每次支付金额相等的年金额为 1 元的期末付终身生存年金，其精算现值用符号 $a_x^{(m)}$ 表示，则

$$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - 1/m \tag{3.2.28}$$

在死亡均匀分布假设条件下，式(3.2.28)转化为

$$a_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x + \beta(m) - 1/m \tag{3.2.29}$$

$a_x^{(m)}$ 的传统近似计算公式是

$$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m+1}{2m} \tag{3.2.30}$$

对于每年分 m 次支付、每次等额支付的年金额为 1 元的延期 h 年的期初付终身生存年金，其精算现值用符号 ${}_{h|}\ddot{a}_x^{(m)}$ 表示，且

$${}_{h|}\ddot{a}_x^{(m)} = {}_hE_x \cdot \ddot{a}_{x+h}^{(m)} \tag{3.2.31}$$

在死亡均匀分布的假设条件下，式(3.2.31)转化为

$$\begin{aligned} {}_{h|}\ddot{a}_x^{(m)} &= {}_hE_x[\alpha(m)\ddot{a}_{x+h} + \beta(m)] \\ &= \alpha(m) \cdot {}_{h|}\ddot{a}_x + \beta(m) \cdot {}_hE_x \end{aligned} \tag{3.2.32}$$

${}_{h|}\ddot{a}_x^{(m)}$ 的传统近似计算公式是

$${}_{h|}\ddot{a}_x^{(m)} \approx {}_{h|}\ddot{a}_x^{(m)} - \frac{m-1}{2m} \cdot {}_hE_x \tag{3.2.33}$$

对于每年分 m 次支付，每次等额支付的年金额为 1 元的期初付 n 年定期生存年金，其精算现值用符号 $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$表示，根据现时支付法与式(3.2.1)，则

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} &= \ddot{a}_x^{(m)} - {}_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} \\ &= \ddot{a}_x^{(m)} - {}_nE_x \cdot \ddot{a}_{x+n}^{(m)} \end{aligned} \tag{3.2.34}$$

在死亡均匀分布假设条件下，式(3.2.34)转化为

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \beta(m)(1 - {}_nE_x)1 \tag{3.2.35}$$

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$的传统近似计算公式是

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x) \tag{3.2.36}$$

[例 3.2.4] 试根据附录 I(C)生命表与预定年利率 $i=6\%$，并在死亡均匀分布的假设条件下，计算生存者在 45 岁时每月领取 800 元的期初付 25 年定期生存年金的精算现值。

解：依题意，知

$$d = 0.0566,\quad i^{(12)} = 0.0584,\quad d^{(12)} = 0.0581$$

$$\alpha(12) = 1.00028,\quad \beta(12) = -0.46812$$

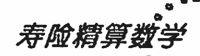
$$\ddot{a}_{45:\overline{25}|} = 12.86393,\quad {}_{25}E_{45} = 0.17806$$

故

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{45:\overline{25}|}^{(12)} &= \alpha(12)\ddot{a}_{45:\overline{25}|} + \beta(12)(1 - {}_{25}E_{45}) \\ &= 1.00028 \times 12.86393 - 0.46812(1 - 0.17806) \\ &= 12.482765 \end{aligned}$$

故所求生存年金的精算现值是

$$\begin{aligned} P &= 12 \times 800 \times a_{45:\overline{25}|}^{(12)} \\ &= 9600 \times 12.482765 = 119834.54(\text{元}) \end{aligned}$$



若采用传统的近似计算公式，则

$$P \approx 9600 \times [\ddot{a}_{45:\overline{25}|} - 11/24(1 - {}_{25}E_{45})]$$
$$= 9600 \times (12.86393 - 0.37672) = 119877.229(\text{元})$$

§3.3 变额生存年金

前面所考虑的生存年金，其每次支付的金额是相等的，即年金的给付是不随支付时刻的变化而改变的，也称为定额生存年金。若每次支付的金额随着支付的时刻变化而改变，则该生存年金称为变额生存年金。

3.3.1 按年递增的期初付终身生存年金

例如，年龄为 x 岁的生存者，按如下形式于年初领取年金：第一年为 1 元，第二年为 2 元，第三年为 3 元，依次类推，直至领取年金的人死亡，便停止支付。此项递增的期初付终身生存年金的精算现值用符号 $(I\ddot{a})_x$ 表示。根据现时支付法，则

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^k{}_kp_x \tag{3.3.1}$$

引入离散型的换算函数，则式(3.3.1)转化为

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)D_{x+k}/D_k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}N_{x+k}/D_x = S_x/D_x \tag{3.3.2}$$

[例 3.3.1] 有一份按年递增的期初付终生生存年金，第一年金额为 100 元，第二年为 200 元，以后每过一年给付金额增加 100 元，$i = 0.06$，其生存模型为

x	90	91	92	93
l_x	100	72	39	0

求该年金的精算现值。

解：根据公式(3.3.1)

$$(I\ddot{a})_{90} = 100\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^k{}_kp_{90}$$
$$= 100\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{1.06}\right)^0\left(\frac{100}{100}\right) + 100\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{1.06}\right)^1\left(\frac{72}{100}\right) + 100\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{1.06}\right)^2\left(\frac{39}{100}\right)$$
$$= 339.979$$

3.3.2 每年分 m 次支付的变额定期生存年金

考虑每年分 m 次支付，年金额按年变动的期初付的 n 年定期生存年金的估值问题。设生存者自 x 岁开始，终止于 $x+n$ 岁，领取的年金顺序列为 b_x，b_{x+1}，…，b_{y+n-1}。每

年分 m 次等额期初支付，则在 y 岁与 $y+1$ 岁之间的 m 次支付在 y 岁的精算现值是 $b_y\ddot{a}_{y:\overline{1}|}^{(m)}$，而该项生存年金在 x 岁时的精算现值记作 $(apv)_x$，则

$$(apv)_x=\sum_{y=x}^{x+n-1}b_y\ddot{a}_{y:\overline{1}|}^{(m)}\cdot{}_{y-x}E_x \tag{3.3.3}$$

又设生存者在每一个年龄中死亡是均匀分布的，则

$$(apv)_x=\sum_{y=x}^{x+n-1}b_y[\alpha(m)+\beta(m)(1-{}_1E_y)]_{y-x}E_x \tag{3.3.4}$$

若引入换算函数，则式(3.3.4)转化为

$$(apv)_x=\frac{1}{D_x}\sum_{y=x}^{x+n-1}b_y[\alpha(m)D_y+\beta(m)D_y-D_{y+1}]$$

记

$$N_y^{(m)}=\alpha(m)N_y+\beta(m)D_y$$
$$D_y^{(m)}=N_y^{(m)}-N_{y+1}^{(m)}$$

则

$$D_y^{(m)}=\alpha(m)D_y+\beta(m)(D_y-D_{y+1})$$

从而，有

$$(apv)_x=\frac{1}{D_x}\sum_{y=x}^{x+n-1}b_yD_y^{(m)} \tag{3.3.5}$$

若该项变额年金改为期末支付，并假设生存者在每个年龄中死亡是均匀分布的，记

$$\widetilde{D}_y^{(m)}=\alpha(m)D_y+(\beta(m)-\frac{1}{m})(D_y-D_{y+1})$$

则其在 x 岁时的精算现值有类似于式(3.3.5)的关系式，即

$$(apv)_x=\frac{1}{D}\sum_{y=x}^{x+n-1}b_y\,\widetilde{D}_y^{(m)} \tag{3.3.6}$$

特别地，若 $b_y=b$(常数)时，则式(3.3.5)转化为

$$(apv)_x=\frac{b}{D_x}(N_x^{(m)}-N_{x+n}^{(m)})$$

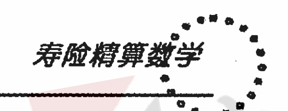
若年金额 b_y 是年龄 y 的线性函数，记

$$S_x^{(m)}=\sum_{y=x}^{\infty}N_y^{(m)}$$
$$N_x^{(m)}=S_x^{(m)}-S_{x+1}^{(m)}$$

在这特殊条件下，该项变额生存年金在 x 岁时的精算现值的估值问题，留给读者自行推导。

§ 3.4 连续型生存年金

连续型生存年金是指每时每刻连续不断地进行支付的生存年金。这类生存年金一般地分为定期生存年金、终身生存年金、延期定期生存年金和延期终身生存年金等。



我们以终身生存年金为例，考察定额终身生存年金的精算现值。假设(x)按连续方式支付年金额为 1 元的终身生存年金，其精算现值用符号 $\bar{a}_x$ 表示，(x)未来寿命 $T=T(x)$，则 $T=T(x)$的密度函数是

$$f_T(t)={}_tp_x\mu_{x+t}$$

其支付年金的现值记作$\bar{Y}$，则

$$\bar{Y}=\bar{a}_{\overline{T}|}=\int_0^T v^t dt$$

利用总额支付法，则

$$\bar{a}_x=E[\bar{a}_{\overline{T}|}]=\int_0^{+\infty}\bar{a}_{\overline{t}|}\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt \tag{3.4.1}$$

采取现时支付法，则

$$\bar{a}_x=\int_0^{+\infty}v^t\,{}_tp_xdt \tag{3.4.2}$$

在式(3.4.1)中使用分部积分法，则式(3.4.1)转化为式(3.4.2)。

为衡量支付连续型的终身生存年金的风险，我们需考虑支付终身生存年金现值 $\bar{a}_{\overline{T}|}$的方差。

$$\begin{aligned}Var[\bar{a}_{\overline{T}|}]&=Var\left[\int_0^T v^t dt\right]\\&=Var\left[\frac{1-v^T}{\delta}\right]=\frac{1}{\delta^2}Var[v^T]\\&=\frac{1}{\delta^2}[{}^2\bar{A}_x-(\bar{A}_x)^2]\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

关于 $\bar{a}_x$ 与$\bar{A}_x$ 之间的关系，我们可以通过$\bar{A}_x$ 表示式得到，即

$$\begin{aligned}\bar{A}_x&=\int_0^{+\infty}v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt\\&=-\int_0^{+\infty}v^td({}_tp_x)\\&=1-\delta\int_0^{+\infty}v^t\,{}_tp_xdt\\&=1-\delta\bar{a}_x\end{aligned}$$

故
$$\bar{A}_x=1-\delta\bar{a}_x \tag{3.4.4}$$

或
$$1=\delta\bar{a}_x+\bar{A}_x \tag{3.4.5}$$

式(3.4.5)的含义留给读者解释。

[例 3.4.1] 设死力是常值 $\mu=0.04$，利力 $\delta=0.06$，在此假设条件下，求：

(1) 终身生存年金的精算现值 $\bar{a}_x$；

(2) 终身生存年金现值 $\bar{a}_{\overline{T}|}$的标准差；

(3) $\bar{a}_{\overline{T}|}$超过$\bar{a}_x$ 的概率。

解：(1) 利用现时支付法，则

$$\begin{aligned}\bar{a}_x&=\int_0^{+\infty}v^t\,{}_tp_xdt=\int_0^{+\infty}\exp(-\delta t)\cdot\exp(-\mu t)dt\\&=-\frac{1}{\delta+\mu}\int_0^{+\infty}\exp[-(\delta+\mu)t]=\frac{1}{\delta+\mu}=10\end{aligned}$$

(2) $\bar{A}_x = 1 - \delta\bar{a}_x = 1 - 0.06 \times 10 = 0.4$

$$^2\bar{A}_x = \int_0^{+\infty} \exp(-2\delta t)\mu\exp(-\mu t)\,dt$$

$$= \frac{\mu}{2\delta + \mu} = 0.25$$

$$Var(\bar{a}_{\overline{T|}}) = \frac{1}{\delta^2}({}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2) = 25$$

故 $\sqrt{Var(\bar{a}_{\overline{T|}})} = 5$

(3) $Pr(\bar{a}_{\overline{T|}} > \bar{a}_x) = Pr\left(\frac{1 - v^t}{\delta} > 10\right)$

$$= Pr(v^t < 0.4) = Pr\left(T > \frac{\ln 0.4}{\ln v}\right)$$

$$= Pr(T > 15.2715)$$

$$= \int_{15.27}^{+\infty} \mu\exp(-\mu t)\,dt$$

$$= \exp(-\mu t)\Big|_{15.27}^{+\infty} = 0.5429$$

此题表明：在死力常值 $\mu = 0.04$，利力 $\delta = 0.06$ 的假设条件下，所收取的趸缴纯保费 $\bar{a}_x = 10$，将不足以支付实际给付年金额为 1 元的终身生存年金的概率(约为 54.29%)。

类似地，对于(x)按连续方式领取的年金额为 1 元的 n 年定期生存年金，其精算现值用符号 $\bar{a}_x$ 表示，利用现时支付法，则

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n v^t\,{}_tp_x\,dt \tag{3.4.6}$$

记此项生存年金的现值为 $\bar{Y}$，则

$$\bar{Y} = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T|}} & (0 \leqslant T < n) \\ \bar{a}_{\overline{n|}} & (T \geqslant n) \end{cases}$$

记连续型 n 年期两全保险、保险金额为 1 元的现值为 Z，则

$$Z = \begin{cases} v^T & (0 \leqslant T < n) \\ v^n & (T \geqslant n) \end{cases}$$

从而有

$$\bar{Y} = \frac{1}{\delta}(1 - Z)$$

利用总额支付法，则

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = E(\bar{Y}) = E\left(\frac{1 - Z}{\delta}\right)$$

$$= \frac{1}{\delta}(1 - E(Z)) = \frac{1}{\delta}(1 - \bar{A}_{x:\overline{n|}}) \tag{3.4.7}$$

即

$$1 = \delta\bar{a}_{x:\overline{n|}} + \bar{A}_{x:\overline{n|}}$$

$$Var(\bar{Y}) = Var\left(\frac{1 - Z}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta^2}Var(Z)$$

$$= \frac{1}{\delta^2}[{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2] \tag{3.4.8}$$

[例 3.4.2] 试证：$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{a}_{x:\overline{n|}}) = (\mu_x + \delta)\bar{a}_{x:\overline{n|}} - (1 - {}_nE_x)$

证明：$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{a}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^n v^t\ {}_tp_x dt\right)$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^n v^t \frac{\partial}{\partial x}({}_tp_x)\,dt \\
&= \int_0^n v^t(\mu_x - \mu_{x+t})({}_tp_x)\,dt \\
&= \int_0^n v^t\ {}_tp_x\mu_x dt - \int_0^n v^t\ {}_tp_x\mu_{x+t}dt \\
&= \mu_x\bar{a}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^1_{x:n} \\
&= \mu_x\bar{a}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x) \\
&= \mu_x\bar{a}_{x:\overline{n}|} - (1 - \delta\bar{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x) \\
&= (\mu_x + \delta)\bar{a}_{x:\overline{n}|} - (1 - {}_nE_x)
\end{aligned}
$$

最后，讨论延期 h 年的终身生存年金和 n 年定期生存年金的精算现值。设(x)按连续方式领取年金额为 1 元的延期 h 年的终身生存年金和 n 年的定期生存年金，其精算现值分别用符号${}_{h|}\bar{a}_x$和${}_{h|n}\bar{a}_x$表示，则

$$
{}_{h|}\bar{a}_x = {}_hE_x \cdot \bar{a}_{x+h} \tag{3.4.9}
$$

或

$$
{}_{h|}\bar{a}_x = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{h}|} \tag{3.4.10}
$$

和

$$
{}_{h|n}\bar{a}_x = {}_hE_x \cdot \bar{a}_{x+h:\overline{n}|} \tag{3.4.11}
$$

或

$$
{}_{h|n}\bar{a}_x = \bar{a}_{x:\overline{n+h}|} - \bar{a}_{x:\overline{h}|} \tag{3.4.12}
$$

引入连续型的换算函数式，记$\bar{N}_x = \int_0^{+\infty} D_{x+t}dt = \int_0^{+\infty} D_s ds$，容易得出连续型生存年金精算现值的换算函数表达式，为

$$
\left.
\begin{aligned}
\bar{a}_x &= \frac{\bar{N}_x}{D_x} \\
\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}{D_x} \\
{}_{h|}\bar{a}_x &= \frac{\bar{N}_{x+h}}{D_x} \\
{}_{h|}\bar{a}_x &= \frac{\bar{N}_{x+h} - \bar{N}_{x+h+n}}{D_x}
\end{aligned}
\right\} \tag{3.4.13}
$$

［例 3.4.3］ 试证：在死亡均匀分布假设条件下，有

$$
\bar{N}_x = \frac{id}{\delta^2}N_x + \frac{\delta - i}{\delta^2}D_x
$$

证明：在死亡均匀分布假设条件下，有

$$
\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x + \beta(m)
$$

且

$$
\lim_{m\to\infty}\alpha(m) = \frac{id}{\delta^2},\quad \lim_{m\to\infty}\beta(m) = \frac{\delta - i}{\delta^2}
$$

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_x^{(m)} = \bar{a}_x$$

则等式两边令 $m \to +\infty$ 时，有

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x \lim_{m\to\infty} \alpha(m) + \lim_{m\to\infty} \beta(m)$$

即

$$\bar{a}_x = \frac{id}{\delta^2}\ddot{a}_x + \frac{\delta - i}{\delta^2}$$

故

$$\frac{\bar{N}_x}{D_x} = \frac{id}{\delta^2}\cdot\frac{N_x}{D_x} + \frac{\delta - i}{\delta^2}$$

或

$$\frac{\bar{N}_x}{D_x} = \frac{\frac{id}{\delta^2}\cdot N_x + \frac{\delta - i}{\delta^2}\cdot D_x}{D_x}$$

故

$$\bar{N}_x = \frac{id}{\delta^2}\cdot N_x + \frac{\delta - i}{\delta^2} D_x$$

在实践中，经常使用近似公式

$$\bar{N}_x \approx N_x - \frac{1}{2} D_x \tag{3.4.15}$$

§3.5　完全期末年金与比例期初年金

在连续生存年金场合，连续直至死亡，不存在调整最后支付问题。但对于离散型生存年金，尤其是按年支付的生存年金，会提出根据死亡日期按比例调整的问题。譬如期末按年提供支付额为 5000 元的生存年金，当年金的领取者在支付日前 1 个月死亡时，可从上次领取日算起，对其活着的 11 个月按比例加付最后一次不满 5000 元的零头数额。又譬如，按生存年金方式支付保费 1000 元来购买人寿保险，当被保险人在周年缴费日 1 个月后死亡时，可退还该年度剩下 11 个月的已缴保费。那么，前者属于完全期末年金类型，后者属于比例期初年金类型。

3.5.1　完全期末年金

每年 1 单位按 $1/m$ 年期末支付，再加上根据从上个 $1/m$ 年期末到死亡日这段时间调整的零数支付，这种完全生存年金的精算现值记为 $\mathring{a}_x^{(m)}$。因 $1/m$ 年期末 $1/m$ 等价于按年支付额

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{\bar{s}_{\overline{t|}}}{\bar{s}_{\overline{1/m|}}} \tag{3.5.1}$$

它可以作为死亡发生在时刻 t 情况下的调整支付额。根据这一调整支付定义，完全期末生存年金恰好等价于年支付额为

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{\bar{s}_{\overline{1/m|}}} = \frac{1}{m}\cdot\frac{\delta}{(1+i)^{1/m} - 1} = \frac{\delta}{i^{(m)}} \tag{3.5.2}$$

的连续型生存年金。

换句话说，在任何一个 $1/m$ 年中，如果 (x) 始终活着，那么连续生存年金提供的支付在该 $1/m$ 年末的值为

$$\frac{1}{m\bar{s}_{\overline{1/m}|}}\bar{s}_{\overline{1/m}|}=\frac{1}{m}$$

如果(x)在该 $1/m$ 年内死亡，那么连续生存年金所提供的支付在死亡时的值等价于

$$\frac{1}{m\bar{s}_{\overline{1/m}|}}\bar{s}_{\overline{t}|}$$

它与完全期末生存年金的调整支付相当。因此我们有

$$\mathring{a}_{x}^{(m)}=\frac{\delta}{i^{(m)}}\bar{a}_{x} \tag{3.5.3}$$

在实践中，调整支付额可采取式(3.5.1)来求其的近似值。然而，包含利息因素的式(3.5.3)导致更为简单的理论，例如

$$1-i^{(m)}\mathring{a}_{x}^{(m)}=1-\delta\bar{a}_{x}=\bar{A}_{x}$$
$$1=i^{(m)}\mathring{a}_{x}^{(m)}+\bar{A}_{x} \tag{3.5.4}$$

对式(3.5.4)的解释是，年龄为 x 岁的人投资 1 单位的资金在每个 $1/m$ 年活着时，期末产生的回报 $i^{(m)}/m$，加上死亡时在 $1/m$ 年内的回报调整

$$i^{(m)}\frac{\bar{s}_{\overline{t}|}}{m\bar{s}_{\overline{1/m}|}}=\delta\bar{s}_{\overline{t}|}=(1+i)^{t}-1$$

再加上死亡时偿还的 1 单位投资基金。

3.5.2 比例期初年金

对期初付生存年金，假设每年 1 单位按 $1/m$ 年期初支付，并根据从死亡日到下一个 $1/m$ 年期初这段时间长度退还付款者部分已付款，这种比例期初生存年金的精算现值记为 $\ddot{a}_{x}^{\{m\}}$。因为在每个 $1/m$ 年期初支付 $1/m$ 的年金等价于以

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{\bar{a}_{\overline{1/m}|}}$$

为支付率的连续支付年金，所以死亡发生在时刻 t 时$(0<t<1/m)$，该 $1/m$ 的退款可定义为

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{\bar{a}_{\overline{1/m-t}|}}{\bar{a}_{\overline{1/m}|}} \tag{3.5.5}$$

按这样定义的退款，比例期初付生存年金恰好等价于年支付额为

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{\bar{a}_{\overline{1/m}|}}=\frac{1}{m}\cdot\frac{\delta}{1-(1-d)^{1/m}}=\frac{\delta}{d^{(m)}} \tag{3.5.6}$$

的连续生存年金，即

$$\ddot{a}_{x}^{\{m\}}=\frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_{x} \tag{3.5.7}$$

而且

$$1-d^{(m)}\ddot{a}_{x}^{\{m\}}=1-\delta\bar{a}_{x}=\bar{A}_{x} \tag{3.5.8}$$
$$1=d^{(m)}\ddot{a}_{x}^{\{m\}}+\bar{A}_{x}$$

读者可对上式作出类似于式(3.5.4)的解释。

[例 3.5.1] 试证下列等式成立：

(1) $\mathring{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}=\frac{\delta}{i^{(m)}}\bar{a}_{x:\overline{n}|}$;

(2) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{\{m\}} = \dfrac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_{x:\overline{n}|}$;

(3) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{\{m\}} = (1+i)^{1/m}\mathring{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$

证明：(1) 由式(3.2.20)和式(3.5.3)，则

$$\mathring{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \mathring{a}_{x}^{(m)} - {}_nE_x\mathring{a}_{x+n}^{(m)} = \frac{\delta}{i^{(m)}}(\bar{a}_x - {}_nE_x\bar{a}_{x+n}) = \frac{\delta}{i^{(m)}}\bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

(2) 由式(3.2.20)和式(3.5.7)，则

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{\{m\}} = \ddot{a}_{x}^{\{m\}} - {}_nE_x\ddot{a}_{x+n}^{\{m\}} = \frac{\delta}{d^{(m)}}(\bar{a}_x - {}_nE_x\bar{a}_{x+n}) = \frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

(3) 由式(3.5.7)，则

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{\{m\}} = \frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{\delta}{v^{1/m}i^{(m)}}\bar{a}_{x:\overline{n}|} = (1+i)^{1/m}\mathring{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$$

以上(3)的解释是，$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{\{m\}}$与$\mathring{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$两样提供年支付额为1个单位，分 m 次支付并按死亡日期调整，只不过 $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{\{m\}}$是在期初支付，而 $\mathring{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$是在期末支付罢了。

由式(3.5.3)，以及$\lim\limits_{m\to 0}(i^{(m)}/i)=1$，可得出(当 $\delta=0$ 时)

$$\bar{a}_x = \bar{a}_{\overline{e_x}|}$$

在这一特殊情形中，x 岁终身年金的精算现值等于期限为期望未来寿命的确定性年金之现值。很多人认为这一相等关系在 $\delta>0$ 时也成立，而以下例子就显示出并非如此。

[例 3.5.2] 对于 $\delta>0$,证明：

(1) $\bar{a}_x < \bar{a}_{\overline{e_x}|}$;　　(2) $a_x < a_{\overline{e_x}|}$，$x<\omega-1$。

证明：(1) 当 $\delta>0$ 时

$$\frac{d}{dt}(\bar{a}_{\overline{t}|}) = \frac{\delta}{i}e^{-\delta t} > 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\bar{a}_{\overline{t}|}) = -\frac{\delta^2}{i}e^{-\delta t} < 0$$

根据 Jensen 不等式(参见《风险理论》(N.L.Bewere 等著，郑韫瑜、余跃年译，上海科学技术出版社 1995 年版第一章)以及式(3.3.1)，则有

$$\bar{a}_x = E[\bar{a}_{\overline{T}|}] < \bar{a}_{\overline{E[T]}|} = \bar{a}_{\overline{e_x}|}$$

(2) 离散型生存年金基于整数值未来寿命变量 K 以及函数 $\bar{a}_{\overline{K}|}$，而 Jensen 不等式的证明与概率分布的形式无关(不管是连续型还是离散型或者混合型)。现在函数

$$\bar{a}_{\overline{t}|} = (1-e^{-\delta t})/i$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\bar{a}_{\overline{t}|}) = -\frac{\delta^2}{i}v^t < 0 \quad (\delta>0)$$

根据 Jensen 不等式

$$a_x = E[a_{\overline{K}|}] \leqslant a_{\overline{E[K]}|} = a_{\overline{e_x}|}$$

只要 K 不是常数，以上不等式就是严格的。譬如当 $x=\omega-1$ 时，K 为 0，此时不等式成为等式。当 $x<\omega-1$ 且 $\varepsilon>0$ 时，有 $a_x < a_{\overline{e_x}|}$

§ 3.6 递推方程式

生存年金精算现值的递推方程式计算也许比用式(3.3.3)和式(3.3.5)计算单个值更可取。但是，式(3.3.3)或式(3.3.5)计算的结果可用于检查递推计算过程中的误差累积。

考虑序列为 b_x，b_{x+1}，$\cdots b_{x+n-1}$的每年分 m 次的期初付生存年金，设$(apv)_y$ 是从 y 岁支付到 $y+n$ 岁的相应年金在 y 岁时的精算现值，由式(3.3.3)得

$$(apv)_y = b_y\ddot{a}^{(m)}_{y:\overline{1}|} + {}_1E_y(apv)_{y+1} \tag{3.6.1}$$

从$(apv)_{x+n}=0$ 开始，可根据以上递归方程依次算出$(apv)_{x+n-1}$，$(apv)_{x+n-2}$，$\cdots$，$(apv)_x$。这种递归计算也许比较公式(3.3.3)或公式(3.3.3)计算单个值$(apv)_x$ 更为方便。

举例来说，对于 $x=c$，$c+1$，$\cdots$，$\omega-1$，需要借助 $\ddot{a}_x^{(m)}$值的一张表，就可以利用递归方程式。

$$\ddot{a}_y^{(m)} = \ddot{a}^{(m)}_{y:\overline{1}|} + {}_1E_y\ddot{a}^{(m)}_{y+1} \tag{3.6.2}$$

若在每一个年龄中的死亡都服从均匀分布假设

$$\ddot{a}^{(m)}_{y:\overline{1}|} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|} + \beta(m)vq_y$$

有

$$\ddot{a}_y^{(m)} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|} + \beta(m)vq_y + vp_y\ddot{a}^{(m)}_{y+1} \tag{3.6.3}$$

从 $\ddot{a}_\omega^{(m)}=0$ 出发，按上式可递归计算出 $\ddot{a}^{(m)}_{\omega-1}$，$\ddot{a}^{(m)}_{\omega-2}$，$\cdots$，$\ddot{a}_c^{(m)}$。当 $m=1$ 时，公式简化为

$$\ddot{a}_\omega^{(m)} = 0, \ddot{a}_y^{(m)} = 1 + vp_y\ddot{a}_{y+1} \tag{3.6.4}$$

[**例 3.6.1**] 证明式(3.6.3)可整理成

$$\ddot{a}_y^{(m)}(1+i) = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}(1+i) + q_y[\beta(m) - \ddot{a}^{(m)}_{y+1}] + a^{(m)}_{y+1} \tag{3.6.5}$$

并对这一公式作一解释。

证明：对式(3.6.3)乘以 $1+i$，以 $1-q_y$ 替代 p_y，移项就可得到式(3.6.5)。

如使用传统近似计算公式

$$\ddot{a}_y^{(m)} \approx \ddot{a}_y - \frac{m-1}{2m}$$

与式(2.6.5)可比较的公式为

$$\ddot{a}_y^{(m)}(1+i) - \left(1 + \frac{m+1}{2m}i\right) + q_y\left(\frac{m-1}{2m} + \ddot{a}^{(m)}_{y+1}\right) \approx \ddot{a}^{(m)}_{y+1} \tag{3.6.6}$$

在养老金体系中，这一公式常用于损益分析。公式(3.6.6)意味着：精算现值 $\ddot{a}_y^{(m)}$经过 1 年按利息累积，减去 1 年中 m 次分期支付的累积，再加上因当年预计死亡而给付的数额后，等于 $y+1$ 岁时年金的精算现值。

习　题　三

1. 某人现年 50 岁，以 10000 元购买于 51 岁开始给付的终身生存年金，试求其每年所

得年金额。

2. 利用附录 I(C)生命表以及年利率 $i=6\%$，计算年龄为 30 岁者，若满 40 年后生存，则给付 10000 元的精算现值。

3. 在 UDD 假设下，其中 $\gamma(m)=\dfrac{d^{(m)}-d}{i^{(m)}d^{(m)}}$试证：

(1) ${}_{h|}\ddot{a}_x^{(m)}=\alpha(m){}_{h|}\ddot{a}_x+\gamma(m){}_hE_x$

(2) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}=\alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}+\gamma(m)(1-{}_nE_x)$

4. 设随机变量 $T=T(x)$的概率密度函数为 $f(t)=0.015e^{-0.015t}\quad(t\geqslant0)$，利息强度为 $\delta=0.05$。试计算精算现值 $\bar{a}_x$。

5. 试证：

(1) $a_x^{(m)}=\dfrac{\delta}{i^{(m)}}\bar{a}_x$

(2) $a_{x:\overline{n}|}^{(m)}=\dfrac{\delta}{i^{(m)}}\bar{a}_{x:\overline{n}|}$

(3) $\bar{a}_x\approx\ddot{a}_x-\dfrac{1}{2}$

6. 试按下列方式支付，分别求现年 30 岁领取年金金额 1200 元的期末付终身生存年金的精算现值，给付方式分别为：(1) 按年；(2) 按半年；(3) 按季；(4) 按月。

7. 某人现年 23 岁，约定在 60 岁之前的 36 年当中每年年初缴付 2000 元给某人寿保险公司，如中途死亡，即行停止，所缴付款额也不退还。而当此人活到 60 岁时，人寿保险公司便开始给付第一年年金，直至死亡。试求此人每次所获得的年金额。

8. 某人现年 55 岁，在人寿保险公司一项终身生存年金，每月末给付金额 250 元，试在 UDD 假设和利率 $i=6\%$ 下，计算其精算现值。

9. 某人现年 35 岁，购买一项定期生存年金，连续给付的年金分别为 200 元、250 元、300 元、350 元、400 元。试求该项生存年金的精算现值。

10. 很多年龄为 23 岁的人共同筹集基金，交约定在每年的年初生存者缴纳 R 元于此项基金，缴付到 64 岁为止。至 65 岁时，生存者将基金均分，使所得金额可购买期初付终身生存年金，每年领取的金额为 3600 元。试求该数额 R。

11. 以转换函数表示下面变动年金的现值。对(x)第一年末给付 1000 元，以后每年比上一年增加给付 500 元，当年给付额增加到 5000 元时，又以每年比上一年减少 1000 元递减，减少到年给付额为 1000 元时，保持这一给付水平直到被保险人死亡为止。

12. 刘某在 50 岁时以 50000 元的趸缴净保费购买了每月给付 k 元的生存年金。假设从购买年金后的一个月开始给付，求 k 值。

第四章

均衡纯保费

本章主要内容： 本章以人寿保险的趸缴纯保费和生存年金的精算现值为基础，运用平衡原理，讨论全离散式寿险模型、全连续式寿险模型和半连续式寿险模型的年缴纯保费，并在死亡均匀分布的条件下，讨论了半连续型寿险保单年均衡纯保费与全离散型寿险保单年均衡纯保费的关系式。

本章主要词汇： 平衡原理　保险损失　均衡纯保费　比例保费　累积增额受益

§4.1　均衡纯保费的计算原理

在第二章和第三章里，我们介绍了人寿保险与生存年金的趸缴纯保费的计算。本章我们将在人寿保险与生存年金的趸缴纯保费基础上，讨论人寿保险以生存年金给付的方式分期缴付的均衡纯保费。

4.1.1　人寿保险模型的种类

对于一个完整的人寿保险模型，它不仅包含保险给付金额，而且还应明确以何种方式缴纳保险费。因此，按保险给付方式与缴费方式来划分，可分为全离散式、半连续式和全连续式三种。所谓全离散式人寿保险模型是指，死亡保险金是在被保险人死亡的保单年度末支付，保险费是按期初付生存年金的方式缴付的寿险模型；所谓半连续式人寿保险模型是指，死亡保险金是在被保险人死亡的当时立即支付，保险费是按期初付生存年金的方式缴付的寿险模型；所谓全连续式人寿保险模型是指，死亡保险金是在被保险人死亡的当时

立即支付，保险费按连续型生存年金的方式缴付的寿险模型。

4.1.2 均衡纯保费的计算原理

人寿保险的纯保费是以预定年利率和预定死亡率为基础，并根据未来给付保险金额而计算得到的，且满足条件：未来给付保险金额现值的期望值(即趸缴纯保费)等于缴纳纯保费的精算现值。这一条件也称做平衡原理。为准确地表达平衡原理，我们将保险给付金额现值与保单持有人或投保人缴付纯保费现值之差称为保险损失，并且字母 L 表示，则平衡原理可表述为

$$E(L)=0 \tag{4.1.1}$$

§4.2 全离散式寿险模型的年缴纯保费

全离散式寿险模型的年缴纯保费，也称年均衡均保费，是指将总纯保费分若干年缴付，且每年所缴纳的数额相同，第一次保险费在签单时缴付，以后每年的保险费是在被保险人生存的条件下，每隔一年缴付一次，直至被保险人死亡或合同规定的缴费期届满时结束，而死亡保险金于被保险人死亡的保单年度末支付。这种寿险模型是寿险实务的基础，而且这种模型对推动精算理论的发展起着重要作用。

4.2.1 终身寿险

终身寿险，按其缴费方式可分为普通终身寿险、限期缴费终身寿险及趸缴纯保费终身寿险三种。

普通终身寿险，系按年终身缴纳保险费，死亡保险金是在被保险人死亡的保单年度末时支付的终身寿险。

假设签单时被保险人的年龄为 x 岁，保险金额为 1 个单位的普通终身寿险，其年缴纯保费记 P_x，则保险人的损失是

$$L=v^{K+1}-P_x\ddot{a}_{\overline{K+1|}}\quad(K=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{4.2.1}$$

根据平衡原理，即 $E(L)=0$,可得

$$E(v^{K+1})-P_xE(\ddot{a}_{\overline{K+1|}})=0$$

从而，有

$$P_x=\frac{A_x}{\ddot{a}_x} \tag{4.2.2}$$

或

$$P_x=\frac{M_x}{N_x} \tag{4.2.3}$$

下面，我们考察保险人损失 L 的方差。由于 $E(L)=0$,则有

$$Var(L)=E(L^2) \tag{4.2.4}$$

根据式(4.2.1)，我们得

$$\begin{aligned}Var(L) &= Var(v^{K+1} - P_x\ddot{a}_{\overline{K+1|}}) \\ &= Var\left(v^{K+1} - \frac{1-v^{K+1}}{d}P_x\right) \\ &= Var\left[v^{K+1}\left(1+\frac{P_x}{d}\right) - \frac{P_x}{d}\right] \\ &= \left(1+\frac{P_x}{d}\right)^2 Var(v^{K+1}) \\ &= \left(1+\frac{P_x}{d}\right)^2 [{}^2A_x - (A_x)^2] \\ &= \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{(d\ddot{a}_x)^2}\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

[例 4.2.1] 设 ${}_{k|}q_x = c(0.96)^{k+1}$，$k = 0,1,2\cdots$。其中 $c = \frac{0.04}{0.96}$，$i = 6\%$，试求：P_x 和 $Var(L)$。

解：根据 A_x 的定义，得

$$\begin{aligned}A_x &= E(v^{K+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_{k|}q_x \\ &= c\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}(0.96)^{k+1} \\ &= c\cdot\frac{0.96v}{1-0.96v} = \frac{0.04}{0.96}\cdot\frac{0.96\times0.943396}{1-0.96\times0.943396} \\ &= 0.4000\end{aligned}$$

又因

$$\ddot{a}_x = \frac{1-A_x}{d}$$

故

$$\begin{aligned}P_x &= \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{dA_x}{1-A_x} \\ &= \frac{0.06}{1+0.06}\cdot\frac{0.4}{1-0.4} \\ &= 0.037736\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}{}^2A_x &= E[(v^2)^{K+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k+2}{}_{k|}q_x \\ &= c\sum_{k=0}^{\infty}(v^2\cdot0.96)^{k+1} \\ &= c\cdot\frac{0.96v^2}{1-0.96v^2} = 0.2445\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}Var(L) &= \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{(d\ddot{a}_x)^2} \\ &= \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{(1-A_x)^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{0.2445 - (0.4)^2}{(1 - 0.4)^2}$$
$$= 0.2347$$

［例 4.2.2］ 设年龄为 x 岁者，投保保险金额为 1 元的全离散式终身寿险保单，前 5 年的年缴纯保费是 5 年以后的年缴纯保费的一半。试用换算函数表示初始时的年缴纯保费。

解：设 P 为初始时的年缴纯保费。根据平衡原理，我们可得到确定 P 的换算函数方程式

$$P(N_x - N_{x+5}) + 2PN_{x+5} = M_x$$

从而，我们有

$$P = \frac{M_x}{N_x + N_{x+5}}$$

限期缴清终身寿险，是指在规定的年限内，按年缴费直至被保险人死亡，或缴清期限届满时停止。限期缴清一般规定按年缴清的最高次数，例如 20 岁时签单的被保险人，按年缴清的最高次数为 45；而 25 岁时签单的被保险人，其按年缴清的最高次数为 40。有时，我们也称此类最高次数限期缴费的终身寿险为 65 岁缴清的终身寿险。

假设签单时被保险人的年龄为 x 岁，保险金额为 1 个单位的 h 年限期缴清终身寿险的年缴纯保费记为${}_hP_x$，则保险人的损失 L 为

$$L = \begin{cases} v^{K+1} - {}_hP_x\ddot{a}_{\overline{h|}} & (K \geqslant h) \\ v^{K+1} - {}_hP_x\ddot{a}_{\overline{K+1|}} & (K = 0, 1, 2, \cdots, h-1) \end{cases}$$

根据平衡原理式(4.1.1)，可得

$$ {}_hP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h|}}} \tag{4.2.6}$$

或

$$ {}_hP_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+h}} \tag{4.2.7}$$

［例 4.2.3］ 假设终身寿险保单于 30 岁签发，保险金额为 20000 元，试求：

（1）普通终身寿险的年缴纯保费；

（2）20 年期限缴清终身寿险的年缴纯保费；

（3）65 岁缴清终身寿险的年缴纯保费。

解：（1）普通终身寿险的年缴纯保费是

$$20000 \cdot P_{30} = 20000 \cdot \frac{M_{30}}{N_{30}}$$
$$= 20000 \cdot \frac{14730.24}{2743767}$$
$$= 107.37(\text{元})$$

（2）20 年限期缴费终身寿险年缴纯保费是

$$20000 \cdot {}_{20}P_{30} = 20000 \cdot \frac{M_{30}}{N_{30} - N_{50}}$$
$$= 20000 \cdot \frac{14730.24}{2743767 - 305710.4}$$

$$= 120.84(\text{元})$$

(3) 65 岁缴清终身寿险的年缴纯保费是

$$20000 \cdot {}_{35}P_{30} = 20000 \cdot \frac{M_{30}}{N_{30} - N_{50}}$$

$$= 20000 \cdot \frac{14730.24}{2743767 - 189682}$$

$$= 115.35(\text{元})$$

[例 4.2.4] 现有保险金额为 10000 元的终身寿险保单，记 π 表示每张保单的年缴纯保费，$L(\pi)$表示每张保单在签单时的损失。若预定年利率 $i = 6\%$，签单时被保险人的年龄为 35 岁，试利用附录 II(A)表中的有关数值：

(1) 求满足条件 $E[L(\pi_0)] = 0$ 的年缴纯保费 π_0；

(2) 设 $A_{35} = 0.1287194$，${}^2A_{35} = 0.0348843$，求 $Var[L(\pi_0)]$；

(3) 求满足条件 $Pr[L(\pi_1) > 0] < 0.5$ 的年缴纯保费 π_1；

(4) 求年缴纯保费 π_2，使得相互独立的 100 张保单总损失大于 0 的概率为 0.05。

解：(1) 若 $E[L(\pi_0)] = 0$，由平衡原理，有

$$\pi_0 = 10000 \cdot P_{35} = 10000 \cdot \frac{M_{35}}{N_{35}}$$

$$= 10000 \cdot \frac{14116.12}{1985692}$$

$$= 71.09(\text{元})$$

(2) $Var[L(\pi_0)] = (10000)^2 \cdot \dfrac{{}^2A_{35} - (A_{35})^2}{(1 - A_{35})^2}$

$$= 10^8 \cdot \frac{0.0348843 - 0.0165687}{0.7591299}$$

$$= 2412709.6$$

(3) 由

$$Pr[L(\pi_1) > 0] < 0.5,$$

得

$$Pr(10000v^{K+1} > \pi_1 \ddot{a}_{\overline{K+1|}}) < 0.5$$

即 $Pr(K < h) < 0.5$

这里，$h = \dfrac{\ln b}{\ln v}$，$b = \dfrac{\pi_1}{10000(1 - v)v + v\pi_1}$

因 $Pr(K < 42) = 1 - {}_{42}p_{35} < 0.5$，且 $L(\pi_1)$是 k 的减函数，取 $h = 42$，则

$$Pr[L(\pi_1) > 0] < 0.5$$

从而，有

$$10000v^{43} - \pi_1 \ddot{a}_{\overline{43|}} = 0$$

故 $\pi_1 = \dfrac{10000}{\ddot{a}_{\overline{43|}}} = 50.31(\text{元})$

(4)记第 i 张保单的损失为 $L_i(\pi)(i = 1, 2, \cdots, 100)$，$S = \sum\limits_{i=1}^{100} L_i(\pi)$。依题意，知 $L_i(\pi)(i = 1, 2, \cdots, 100)$相互独立且与 $L(\pi)$同分布，从而有

$$E(S)=E\left(\sum_{i=1}^{100} L_i(\pi)\right)=100E[L(\pi)]$$

$$Var(S)=Var\left(\sum_{i=1}^{100} L_i(\pi)\right)=100Var[L(\pi)]$$

若 $\pi=\pi_2$，使得

$$Pr(S>0)=0.05$$

即

$$Pr\left(\frac{S-E(S)}{\sqrt{Var(S)}}>\frac{-E(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right)=0.05$$

由中心极限定理，得

$$\frac{-E(S)}{\sqrt{Var(S)}}=1.645$$

或

$$\pi_2-(10000d+\pi_2)A_{35}=0.1645(10000d+\pi_2)\sqrt{{}^2A_{35}-(A_{35})^2}$$

解之得

$$\begin{aligned}\pi_2&=10000d\frac{A_{35}+0.1645\sqrt{{}^2A_{35}-(A_{35})^2}}{1-A_{35}-0.1645\sqrt{{}^2A_{35}-(A_{35})^2}}\\&=100.66(元)\end{aligned}$$

趸缴纯保费终身寿险，是在签单时一次将保费缴清的终身寿险，即为限期缴清的特殊情形。

4.2.2 n 年定期寿险

n 年定期寿险通常其年缴纯保费次数与保险期限的年数相等，因此，常冠以年数相称。例如，10 年定期寿险是指保险期限为 10 年，其年缴纯保费次数亦为 10 次。

假设年龄为 x 岁的人，签发 n 年定期寿险，保险金额为 1 个单位的年缴纯保费(也称均衡纯保费)为 $P^1_{x:\overline{n|}}$，则

$$P^1_{x:\overline{n|}}=\frac{A^1_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \tag{4.2.8}$$

或

$$P^1_{x:\overline{n|}}=\frac{M_x-M_{x+n}}{N_x-N_{x+n}} \tag{4.2.9}$$

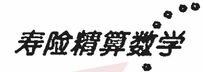
式(4.2.8)留给读者自己推导。

[例 4.2.5] 设年龄为 25 岁的人，购买 15 年定期寿险，保险金额为 1000 元，试求其自然纯保费与年缴纯保费(即均衡纯保费)。

解：其自然纯保费见表 4－1。

表 4－1 自然纯保费

x	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
c_x	0.70	0.69	0.69	0.69	0.70	0.73	0.76	0.81	0.86	0.92	1.00	1.08	1.18	1.29	1.41



其中，$c_x = 1000\dfrac{C_x}{D_x}$，$x = 25, 26, \cdots, 39$。

均衡纯保费

$$1000P^{1}_{25:\overline{15}|} = 1000\frac{M_{25}-M_{40}}{N_{25}-N_{40}} = 1000\frac{15434.48-13451.35}{3742125-1422017} = 0.85$$

4.2.3 n 年两全保险

n 年两全保险亦称 n 年储蓄寿险。n 年两全保险按缴费方式可分为 n 年普通两全保险、限期缴清的 n 年两全保险和趸缴纯保费两全保险三种。

普通两全保险，是指保险期限的年数与年缴纯保费次数相同的两全保险。例如，保险期为 n 年，则年缴纯保费次数为 n 次。常简称为 n 年两全保险。

假设年龄为 x 岁的人，签发保险金额为 1 个单位的 n 年两全保险，其年缴纯保费为 $P_{x:\overline{n}|}$，则保险人的损失是

$$L = \begin{cases} v^{K+1} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{K+1}|} & (K = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \\ v^{n} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{n}|} & (K \geqslant n) \end{cases}$$

读者可以证明

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{4.2.10}$$

或

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \tag{4.2.11}$$

类似地，h 年限期缴清 n 年两全保险，是指保险金额为 1 个单位，保险期为 n 年，h 年缴清保险费的两全保险。其年缴纯保费用 ${}_hP_{x:\overline{n}|}$ 表示，则

$${}_hP_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \tag{4,2.12}$$

或

$${}_hP_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+h}} \tag{4.2.13}$$

趸缴纯保费两全保险，显然是限期缴清的特殊情况，这里不再赘述。

全离散式寿险模型年缴纯保费 P 计算的一般方法，显然是采用下面的方程式

$$E(b_{K+1}v_{K+1}) = PE(Y)$$

其中，Y 是期初生存年金的现值随机变量。即根据

未来给付金额的现值 = 未来缴付纯保费的现值

对 P 进行求解。

[例 4.2.6]　设 20 年限期缴费的 30 年两全保险，于 25 岁时签发，保险金额为 1000 元，试求其年缴纯保费。

解：设所求年缴纯保费为 P，则

$$P\ddot{a}_{25:\overline{20}|} = 1000A_{25:\overline{20}|}$$

解之得

$$\begin{aligned} P &= 1000\frac{M_{25} - M_{55} + D_{55}}{N_{25} - N_{45}} \\ &= 1000\frac{15434.48 - 10611.9 + 37176.27}{3762125 - 1003984} \\ &= 15.23 \end{aligned}$$

下面，考察 n 年两全保险，保险金额为 1 个单位，其保险人损失 L 的方差。

假设保险金额为 1 个单位的 n 年两全保险，其给付现值为 Z，则

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & (K = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \\ v^n & (K = n, n+1, \cdots) \end{cases}$$

从而保险人的损失是

$$L = Z - P_{x:\overline{n}|}\frac{1-Z}{d}$$

故

$$\begin{aligned} Var[L] &= Var\left[Z - P_{x:\overline{n}|}\frac{1-Z}{d}\right] \\ &= Var\left[\left(1 + \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\right)Z - \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\right] \\ &= \left(1 + \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\right)^2 Var(Z) \\ &= \left(1 + \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\right)^2 [{}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2] \end{aligned}$$

$$= \frac{{}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2}{(1 - A_{x:\overline{n}|})^2} \qquad (4.2.14)$$

$$= \frac{{}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2}{(d\ddot{a}_{x:\overline{n}|})^2} \qquad (4.2.15)$$

显然，年缴纯保费与趸缴纯保费之间有如下关系式

$$P_x = \frac{dA_x}{1 - A_x} \qquad (4.2.16)$$

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{dA_{x:\overline{n}|}}{1 - A_{x:\overline{n}|}} \qquad (4.2.17)$$

以上两式的证明留给读者。式(4.2.16)的文字解释是：年龄为 x 岁的被保险人以 A_x元购买保险金额为 1 元的终身寿险。若趸缴纯保费 A_x元看作是借款，被保险人愿意在其生存期间的每个保单年度初给付贷款利息 dA_x元。若被保险人死亡，则从其死亡的保单年度末的死亡给付额 1 元中扣除借款 A_x元。这等价于年龄为 x 岁的被保险人以年缴纯保费 dA_x 元，购买保险金额为 $1 - A_x$元的终身寿险，所以保险金额为 1 元的终身寿险，其年缴纯保费是$\frac{dA_x}{1 - A_x}$。

读者可类似地解释式(4.2.17)的含义。

[例 4.2.7] 试证：

$$P_{x:\overline{n}|} = {}_nP_x + P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}(1 - A_{x+n})$$

其中 $P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$是 n 年生存保险、保险金额为 1 个单位的年缴纯保费。

证明： 依题意，得

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$_nP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

故

$$P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^1 + {}_nE_x$$

$$_nP_x\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_x = A_{x:\overline{n}|}^1 + {}_{n|}A_x$$

$$= A_{x:\overline{n}|}^1 + {}_nE_x \cdot A_{x+n}$$

两式相减，得

$$(P_{x:\overline{n}|} - {}_nP_x)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_nE_x(1 - A_{x+n})$$

故

$$P_{x:\overline{n}|} - {}_nP_x = \frac{{}_nE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = (1 - A_{x+n})$$

即

$$P_{x:\overline{n}|} = {}_nP_x + P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}(1 - A_{x+n}) \tag{4.2.18}$$

读者可以自行解释式(4.2.18)的含义。

§ 4.3 全连续式寿险模型的年缴纯保费

全连续式寿险模型的年缴纯保费，是每年按连续的方式缴付纯保费，且死亡保险金在被保险人死亡时立即给付。

4.3.1 终身寿险的年缴纯保费

假设年龄为 x 岁的人，购买保险金额为 1 单位的全连续式终身寿险，其年缴纯保费用符号$\overline{P}(\overline{A}_x)$表示，则该寿险保单的保险损失

$$L = v^T - \overline{P}(\overline{A}_x)\bar{a}_{\overline{T}|}$$

故

$$E(L) = E(v^T) - \overline{P}(\overline{A}_x)E(\bar{a}_{\overline{T}|})$$

$$= \overline{A}_x - \overline{P}(\overline{A}_x)\bar{a}_{\overline{T}|}$$

根据平衡原理式(3.1.1)，则有

$$\overline{P}(\overline{A}_x) = \frac{\overline{A}_x}{\bar{a}_x} = \frac{\overline{M}_x}{\overline{N}_x} \tag{4.3.1}$$

或

$$\overline{P}(\overline{A}_x) = \frac{\delta\overline{A}_x}{1 - \overline{A}_x}$$

然后，我们来考察全连续式终身寿险的保险损失 L 的方差。由于

$$E(L) = 0$$

故
$$Var(L)=E(L^2)$$
根据式(4.3.1)，我们有
$$\begin{aligned}Var(L) &= Var[v^T-\overline{P}(\overline{A}_x)\bar{a}_{\overline{T|}}]\\ &= Var\left[v^T-\frac{(1-v^T)}{\delta}\overline{P}(\overline{A}_x)\right]\\ &= Var\left[\left(1+\frac{\overline{P}(\overline{A}_x)}{\delta}\right)v^T-\frac{\overline{P}(\overline{A}_x)}{\delta}\right]\\ &= \left(1+\frac{\overline{P}(\overline{A}_x)}{\delta}\right)^2 Var(v^T)\\ &= \left(1+\frac{\overline{P}(\overline{A}_x)}{\delta}\right)^2[{}^2\overline{A}_x-(\overline{A}_x)^2]\\ &= \frac{{}^2\overline{A}_x-(\overline{A}_x)^2}{(\delta\bar{a}_x)^2}\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

[例 4.3.1] 试证：

(1) $\overline{P}(\overline{A}_x)=\dfrac{\delta\overline{A}_x}{1-\overline{A}_x}$;

(2) $Var(L)=\dfrac{{}^2\overline{A}_x-(\overline{A}_x)^2}{(1-\overline{A}_x)^2}$ (4.3.3)

其中，L 是全连续式终身寿险的保险损失。

证明：(1) 根据式(3.4.5)，有
$$\delta\bar{a}_x+\overline{A}_x=1$$
则有
$$\delta+\frac{\overline{A}_x}{\bar{a}_x}=\frac{1}{\bar{a}_x}$$
故
$$\begin{aligned}\overline{P}(\overline{A}_x) &= \frac{1}{\bar{a}_x}-\delta\\ &= \frac{1-\delta\bar{a}_x}{\bar{a}_x}\\ &= \frac{\delta\overline{A}_x}{1-\overline{A}_x}\end{aligned}$$

(2)由于 $\delta\bar{a}_x+\overline{A}_x=1$

将之代入式(4.3.2)，即得
$$Var(L)=\frac{{}^2\overline{A}_x-(\overline{A}_x)^2}{(1-\overline{A}_x)^2}$$

[例 4.3.2] 假设死力 $\mu=0.04$ 是常值，利力 $\delta=0.06$。试计算年缴纯保费 $\overline{P}(\overline{A}_x)$ 与保险损失 L 的方差 $Var(L)$。

解：$\bar{a}_x=\int_0^\infty v^t\,{}_tp_x dt=\int_0^\infty \exp(-0.04t)\exp(-0.06t)\,dt=10$

$\overline{A}_x=\int_0^\infty 0.04\exp(-0.04t)\exp(-0.06t)\,dt=0.4$

$$^2\bar{A}_x = \int_0^\infty 0.04\exp(-0.04t)(\exp(-0.06t))^2 dt = 0.25$$

(1)

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} = \frac{0.4}{10} = 0.04$$

或

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\delta\bar{A}_x}{1-\bar{A}_x} = \frac{(0.06)(0.4)}{1-0.4} = 0.04$$

(2)

$$Var(L) = \frac{^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(1-\bar{A}_x)^2}$$

$$= \frac{0.25 - 0.4^2}{(1-0.4)^2} = 0.25$$

在上例中，年缴纯保费$\bar{P}(\bar{A}_x) = 0.04$，正好等于常值死力 $\mu = 0.04$，这是否说明，在死力 $\mu_{x+t} = \mu$ 为常值的条件下，$\bar{P}(\bar{A}_x) = \mu$ 成立呢？回答是肯定的。这是因为在死力 $\mu_{x+t} = \mu$ 为常值的条件下，我们有

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty \mu\exp(-\mu)\exp(-\delta t)dt = \frac{\mu}{\mu+\delta}$$

其中，$\delta = \ln(1+i)$，i 为预定年利率。

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\delta\bar{A}_x}{1-\bar{A}_x} = \frac{\delta\cdot\frac{\mu}{\mu+\delta}}{1-\frac{\mu}{\mu+\delta}} = \mu$$

4.3.2 其他寿险模式的年缴纯保费公式

考察全连续式人寿保险模型的一般情形。设其年缴纯保费为$\bar{P}$，则保险损失 L 可表示为

$$L = b_T v_T - \bar{P}Y = Z - \bar{P}Y$$

其中，b_T 与 v_T 分别是给付函数与现值函数；Z 是死亡给付金额在签单时的现值；Y 是按连续型生存年金方式所缴保费的现值。

利用平衡原理式，可得

$$E(b_T v_T) - \bar{P}E(Y) = 0$$

解之得

$$\bar{P} = \frac{E(b_T v_T)}{E(Y)}$$

按照上述步骤，我们可以得出在全连续式寿险模型中一些常见险种的年缴纯保费公式，具体形式见表 4－2。

[例 4.3.3] 试导出保险金额为 1 单位的全连续式 n 年两全保险年缴纯保费公式，并用趸缴纯保费符号表示其保险损失 L 的方差 $Var(L)$。

解：依题意，其给付金额的现值是

$$Z = \begin{cases} v^T & (0 \leq T < n) \\ v^n & (T \geq n) \end{cases}$$

表 4-2　　年缴均衡纯保费计算公式

险种	保险金的现值	纯保费的现值	纯保费公式
	$b_T\cdot v^T$	Y	$\bar{P}=\frac{E(b_Tv_T)}{E(Y)}$
终身寿险	$1v^T$	$\bar{a}_{\overline{T}\mid}$	$\bar{P}(\bar{A}_x)=\frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}=\frac{\bar{M}_x}{\bar{N}_x}$
n 年定期寿险	$1v^T$ 0	$\bar{a}_{\overline{T}\mid}$，$T<n$ $\bar{a}_{\overline{T}\mid}$，$T\geqslant n$	$\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\mid})=\frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}\mid}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\mid}}=\frac{\bar{M}_x-\bar{M}_{x+n}}{\bar{N}_x-\bar{N}_{x+n}}$
n 年两全保险	$1v^T$ $1v^n$	$\bar{a}_{\overline{T}\mid}$，$T<n$ $\bar{a}_{\overline{T}\mid}$，$T\geqslant n$	$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\mid})=\frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\mid}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\mid}}=\frac{\bar{M}_x-\bar{M}_{x+n}+D_{x+n}}{\bar{N}_x-\bar{N}_{x+n}}$
h 年限期缴清的终身寿险	$1v^T$ $1v^T$	$\bar{a}_{\overline{T}\mid}$，$T<h$ $\bar{a}_{\overline{T}\mid}$，$T\geqslant h$	${}_h\bar{P}(\bar{A}_x)=\frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\mid}}{\bar{a}_{x:\overline{h}\mid}}=\frac{\bar{M}_x}{\bar{N}_x-\bar{N}_{x+h}}$
h 年限期缴清 n 年两全保险	$1v^T$ $1v^T$ $1v^n$	$\bar{a}_{\overline{T}\mid}$，$T\leqslant h$ $\bar{a}_{\overline{h}\mid}$，$h<T<n$ $\bar{a}_{\overline{T}\mid}$，$T>n$	${}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\mid})=\frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\mid}}{\bar{a}_{x:\overline{h}\mid}}=\frac{\bar{M}_x-\bar{M}_{x+n}+D_{x+n}}{\bar{N}_x-\bar{N}_{x+h}}$
n 年生存保险	0 $1v^n$	$\bar{a}_{\overline{T}\mid}$，$T\leqslant n$ $\bar{a}_{\overline{T}\mid}$，$T>n$	$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\mid}^{\ \ 1})=\frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\mid}^{\ \ 1}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\mid}}=\frac{D_{x+n}}{\bar{N}_x-\bar{N}_{x+n}}$
n 年延期的终身生存年金	0 $\bar{a}_{\overline{T-n}\mid}v^n$	$\bar{a}_{\overline{T}\mid}$，$T\leqslant n$ $\bar{a}_{\overline{T}\mid}$，$T>n$	$\bar{P}({}_{n\mid}\bar{a}_x)=\frac{A_{x:\overline{n}\mid}^{\ \ 1}\bar{a}_{x+n}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\mid}}=\frac{\bar{N}_{x+n}}{\bar{N}_x-\bar{N}_{x+n}}$

生存年金的现值是

$$Y=\begin{cases}\bar{a}_{\overline{T}\mid} & (0\leqslant T<n)\\ \bar{a}_{\overline{n}\mid} & (T\geqslant n)\end{cases}$$

$$=\frac{1-Z}{\delta}$$

则其保险损失 L 为

$$L=Z-\frac{1-Z}{\delta}\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\mid})$$

根据平衡原理有

$$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\mid})=\frac{E(Z)}{E\left(\frac{1-Z}{\delta}\right)}=\frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\mid}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\mid}} \tag{4.3.4}$$

$$Var(L)=Var\left[Z-\frac{1-Z}{\delta}\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\mid})\right]$$

$$=Var\left[\left(1+\frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\mid})}{\delta}\right)Z-\frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\mid})}{\delta}\right]$$

$$=\left(1+\frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\mid})}{\delta}\right)^2 Var(Z)$$

$$= \left(1 + \frac{\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}|})}{\delta}\right)^2 [{}^2\overline{A}_{x:\overline{n}|} - (\overline{A}_{x:\overline{n}|})^2]$$

由于

$$\delta\overline{a}_{x:\overline{n}|} + \overline{A}_{x:\overline{n}|} = 1$$

故

$$1 + \frac{\overline{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta\overline{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{1}{\delta\overline{a}_{x:\overline{n}|}}$$

即

$$1 + \frac{\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}|})}{\delta} = \frac{1}{\delta\overline{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{1}{1 - \overline{A}_{x:\overline{n}|}}$$

故

$$Var(L) = \frac{{}^2\overline{A}_{x:\overline{n}|} - (\overline{A}_{x:\overline{n}|})^2}{(\delta\overline{a}_{x:\overline{n}|})^2} = \frac{{}^2\overline{A}_{x:\overline{n}|} - (\overline{A}_{x:\overline{n}|})^2}{(1 - \overline{A}_{x:\overline{n}|})^2} \tag{4.3.5}$$

读者可以证明

$$\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\delta\overline{A}_{x:\overline{n}|}}{1 - \overline{A}_{x:\overline{n}|}} \tag{4.3.6}$$

并用文字解释式(4.3.6)的含义。

读者也可对表 4-2 中其他常见险种的年缴纯保费公式进行验证。

4.3.3 死亡均匀分布假设下的年缴纯保费

对于全连续式寿险模型，在死亡均匀分布假设下的年缴纯保费，我们以限期 h 年缴清的终身寿险为例，假设(x)购买全连续式的限期 h 年缴清的保险金额为 1 个单位的终身寿险，根据表 4-2 可知

$${}_h\overline{P}(\overline{A}_x) = \frac{\overline{A}_x}{\overline{a}_{x:\overline{h}|}}$$

在死亡均匀分布的假设条件下，则

$$\overline{A}_x = \frac{i}{\delta}\cdot A_x$$

$$\overline{a}_{x:\overline{h}|} = \alpha(\infty)\ddot{a}_{x:\overline{h}|} + \beta(\infty)(1 - {}_hE_x)$$

从而有

$${}_h\overline{P}(\overline{A}_x) = \frac{i}{\delta}\cdot\frac{A_x}{\alpha(\infty)\ddot{a}_{x:\overline{h}|} + \beta(\infty)(1 - {}_hE_x)} = \frac{i}{\delta}\cdot\frac{M_x}{\alpha(\infty)(N_x - N_{x+h}) + \beta(\infty)(D_x - D_{x+h})} \tag{4.3.7}$$

其中，$\alpha(\infty) = id/\delta^2$，$\beta(\infty) = (\delta - i)/\delta^2$

特别地，在式(4.3.7)中，令 $h \to +\infty$，则得

$$\overline{P}(\overline{A}_x) = \frac{i}{\delta}\cdot\frac{M_x}{\alpha(\infty)N_x + \beta(\infty)D_x} \tag{4.3.8}$$

类似地，在死亡均匀分布假设条件下，可得

$$\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{i}{\delta}\cdot\frac{M_x - M_{x+n}}{\alpha(\infty)(N_x - N_{x+n}) + \beta(\infty)(D_x - D_{x+n})} + \frac{D_{x+n}}{\alpha(\infty)(N_x - N_{x+n}) + \beta(\infty)(D_x - D_{x+n})} \tag{4.3.9}$$

$${}_h\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{i}{\delta}\cdot\frac{M_x - M_{x+n}}{\alpha(\infty)(N_x - N_{x+h}) + \beta(\infty)(D_x - D_{x+h})} + \frac{D_{x+n}}{\alpha(\infty)(N_x - N_{x+h}) + \beta(\infty)(D_x - D_{x+h})} \tag{4.3.10}$$

式(4.3.10)中，当 $h=n$ 时，便可得到$\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}|})$的换算函数表示式。

§4.4 半连续式寿险模型的年缴纯保费

半连续式寿险模型在保险实务中是最常用的保险模型。因为人寿保险的死亡给付通常是在被保险人死亡时支付，且保险费是按期初付生存年金的方式来缴纳，所以它比较切合实际，具有较强的实用性和可操作性。半连续式寿险模型可以说是将全离散式与全连续式寿险模型综合修改而来的。其年缴纯保费的计算方法与全连续式寿险模型类似。

4.4.1 终身寿险的年缴纯保费

对于保险金额为1个单位的半连续式普通终身寿险，若被保险人在签单时的年龄为 x 岁，其年缴纯保费用符号 $P(\overline{A}_x)$表示，则其保险损失 L 为

$$L = v^T - P(\overline{A}_x)\ddot{a}_{K+1} \qquad (T\geqslant 0, K=0,1,2,\cdots)$$

故

$$\begin{aligned} E(L) &= E(v^T) - P(\overline{A}_x)E(\ddot{a}_{K+1}) \\ &= \overline{A}_x - P(\overline{A}_x)\ddot{a}_x \end{aligned}$$

根据平衡原理，有

$$P(\overline{A}_x) = \frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_x} = \frac{\overline{M}_x}{N_x} \tag{4.4.1}$$

在 UDD 假设条件下，上式可表示为

$$\begin{aligned} P(\overline{A}_x) &= \frac{i}{\delta}\cdot\frac{A_x}{\ddot{a}_x} \\ &= \frac{i}{\delta}\cdot P_x \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

4.4.2 其他寿险模式的年缴纯保费公式

同样地，记 $P(\overline{A}^1_{x:\overline{n}|})$、$P(\overline{A}_{x:\overline{n}|})$、${}_hP(\overline{A}_x)$、${}_hP(\overline{A}_{x:\overline{n}|})$分别为保险金额为1个单位的半连续式的 n 年定期寿险、n 年两全保险、h 年限期缴费终身寿险和 h 年限期缴费 n 年两

全保险的年缴纯保费。

类似地，我们有如下公式

$$P(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}})=\frac{\overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \tag{4.4.3}$$

$$P(\overline{A}_{x:\overline{n|}})=\frac{\overline{A}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

$$=P(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}})+P_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} \tag{4.4.4}$$

$${}_hP(\overline{A}_x)=\frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h|}}} \tag{4.4.5}$$

$${}_hP(\overline{A}_{x:\overline{n|}})=\frac{\overline{A}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{h|}}} \tag{4.4.6}$$

且在 UDD 假设条件下，可以表示为

$$P(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}})=\frac{i\overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}}}{\delta\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}=\frac{i}{\delta}P^{1}_{x:\overline{n|}} \tag{4.4.7}$$

$$P(\overline{A}_{x:\overline{n|}})=\frac{i}{\delta}P^{1}_{x:\overline{n|}}+P_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} \tag{4.4.8}$$

$${}_hP(\overline{A}_x)=\frac{i}{\delta}{}_hP_x \tag{4.4.9}$$

$${}_hP(\overline{A}_{x:\overline{n|}})=\frac{i}{\delta}{}_hP^{1}_{x:\overline{n|}}+{}_hP_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} \tag{4.4.10}$$

其中，${}_hP_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}$表示保险金额为 1 个单位的限期 h 年缴清的 n 年期生存保险的年缴纯保费。

[例 4.4.1] 设年龄为 25 岁者，购买保险金额为 1000 元的半连续式寿险保单，预定年利率 $i=6\%$。试在 UDD 假设条件下，计算下列各保单的年缴纯保费。

(1) 普通终身寿险；

(2) 35 年定期寿险；

(3) 35 年两全保险；

(4) 35 年限期缴清终身寿险。

解：已知预定年利率 $i=6\%$，则

$$\delta=\ln(1+0.06)=0.0582689$$

$$\frac{i}{\delta}=\frac{0.06}{0.0582689}=1.0297088$$

由附录 II(A)换算表可知：$M_{25}=15434.48$，$M_{60}=9301.689$，$D_{60}=26606.02$，$N_{25}=376125$，$N_{60}=305710.4$，则

$$P_{25}=\frac{M_{25}}{N_{25}}=0.0041026$$

$$P^{1}_{25:\overline{35|}}=\frac{M_{25}-M_{60}}{N_{25}-N_{60}}=0.0017743$$

$$P_{25:\overline{35|}}^{\ \ 1}=\frac{D_{60}}{N_{25}-N_{60}}=0.0076976$$

$$ {}_{35}P_{25} = \frac{M_{25}}{N_{25} - N_{60}} = 0.0044655 $$

(1) 普通终身寿险的年缴纯保费

$$ \begin{aligned} P &= 1000P(\overline{A}_{25}) = 1000\,\frac{i}{\delta}P_{25} \\ &= 1000(1.0297088)(0.0041026) \\ &= 4.22(\text{元}) \end{aligned} $$

(2) 35 年定期寿险的年缴纯保费

$$ \begin{aligned} P &= 1000P(\overline{A}^{1}_{25:\overline{35}|}) = 1000\cdot\frac{i}{\delta}\cdot P^{1}_{25:\overline{35}|} \\ &= 1000(1.0297088)(0.0017743) \\ &= 1.83(\text{元}) \end{aligned} $$

(3) 35 年两全保险的年缴纯保费

$$ \begin{aligned} P &= 1000P(\overline{A}_{25:\overline{35}|}) = 1000\left(\frac{i}{\delta}P^{1}_{25:\overline{35}|} + P_{25:\overset{1}{\overline{35}|}}\right) \\ &= 1000[(1.0297088)(0.0017743) + 0.0076976] \\ &= 9.53(\text{元}) \end{aligned} $$

(4) 35 年限期缴清的终身寿险年缴纯保费

$$ \begin{aligned} P &= 1000\,{}_{35}P(\overline{A}_{25}) \\ &= 1000(1.0297088)(0.0044655) \\ &= 4.60(\text{元}) \end{aligned} $$

§ 4.5 每年分 m 次缴费的年均纯保费

前面我们介绍了按年且每年只缴付一次的年均纯保费。本节我们将讨论按年且每年缴费 m 次的寿险模型的年均纯保费，这类寿险模型更切合实际，从而更具有实际意义。

4.5.1 分期缴付保费的计算方法

对于每年分 m 次缴付的年均纯保费 P，其计算方法是

$$ m\cdot x\cdot \ddot{a}^{(m)}_{y:\overline{1}|} = P \tag{4.5.1} $$

用符号 $P_x^{(m)}$ 表示保险金额为 1 个单位的全离散式普通终身寿险，每年分 m 次缴付的年均衡纯保费。在人寿保险的实务中，通常 $m = 2$、4 或 12，即分别是按半年、季或月缴付保费的寿险模型。

4.5.2 每年分 m 次缴付的年均纯保费计算公式

表 4－3 详细地表明人寿保险中一些常见险种的分期付款式的年均纯保费的符号以及计算公式。

表 4-3　每年缴付 m 次的年均纯保费公式

险　种	保险金额给付的时间	
	在保单年度末	在死亡当时
终身寿险	$P_x^{(m)}=\dfrac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$	$P^{(m)}(\bar{A}_x)=\dfrac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$
n 年定期寿险	$P_{x:\overline{n}\mid}^{1(m)}=\dfrac{A_{x:\overline{n}\mid}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\mid}^{(m)}}$	$P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}\mid}^1)=\dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}\mid}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\mid}^{(m)}}$
n 年两全保险	$P_{x:\overline{n}\mid}^{(m)}=\dfrac{A_{x:\overline{n}\mid}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\mid}^{(m)}}$	$P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}\mid})=\dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}\mid}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\mid}^{(m)}}$
h 年限期缴清的 n 年终身寿险	${}_hP_x^{(m)}=\dfrac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\mid}^{(m)}}$	${}_hP^{(m)}(\bar{A}_x)=\dfrac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\mid}^{(m)}}$
h 年限期缴清的 n 年两全保险($h<n$)	${}_hP_{x:\overline{n}\mid}^{(m)}=\dfrac{A_{x:\overline{n}\mid}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\mid}^{(m)}}$	${}_hP^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}\mid})=\dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}\mid}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\mid}^{(m)}}$

注：$P^{(m)}$表示每年分 m 次缴纳的年均纯保费，每次缴纳的纯保费为 $P^{(m)}/m$。
这里 h 表示缴费期的年数，而不是缴费的次数。

表 4-3 中年均纯保费计算公式可以由平衡原理式(4.1.1)而得到。读者可视之为练习给予验证。

[例 4.5.1]　年龄为 50 岁者，购买一张保险金额为 10000 元的 20 年普通两全保险的保单，每年缴付保费两次(即半年期缴付)。试利用换算函数表和预定年利率 $i=6\%$，并在 UDD 假设条件下，计算：

(1)全离散式的年缴纯保费；

(2)半连续式的年缴纯保费。

解： 依题意，可得

$$d=\frac{i}{1+i}=0.056603774$$

$$\delta=\ln(1+i)=0.0582689$$

$$i^{(2)}=2[(1+i)^{\frac{1}{2}}-1]=0.059126028$$

$$d^{(2)}=2[1-(1+i)^{-\frac{1}{2}}]=0.05742875$$

$$\alpha(2)=\frac{id}{i^{(2)}d^{(2)}}=1.00021218$$

$$\beta(2)=\frac{i^{(2)}-i}{i^{(2)}d^{(2)}}=-0.25739080$$

$$\ddot{a}_{50:\overline{20}\mid}=\frac{N_{50}-N_{70}}{D_{50}}=11.458095$$

$${}_{20}E_{50}=\frac{D_{70}}{D_{50}}=0.242211$$

$$A_{50:\overline{20}\mid}^1=\frac{M_{50}-M_{70}}{D_{50}}=0.109218$$

$$A_{50:\overline{20}\mid}=\frac{M_{50}-M_{70}+D_{70}}{D_{50}}=0.351429$$

$$\ddot{a}_{50:\overline{20}|}^{(2)} = \alpha(2)\ddot{a}_{50:\overline{20}|} + \beta(2)(1 - {}_{20}E_{50}) = 11.203135$$

故全离散式分两次缴付的年缴纯保费为

$$10000P_{50:\overline{20}|}^{(2)} = 10000\frac{A_{50:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{50:\overline{20}|}^{(2)}} = 313.69(\text{元})$$

半连续式分两次缴付的年缴纯保费为

$$10000P^{(2)}(\overline{A}_{50:\overline{20}|}) = 10000\left(\frac{i}{\delta}A_{50:\overline{20}|}^{1} + {}_{20}E_{50}\right)/\ddot{a}_{50:\overline{20}|}^{(2)}$$

$$= 316.44(\text{元})$$

若采用传统的近似计算方法，则

$$\ddot{a}_{50:\overline{20}|}^{(2)} \approx \ddot{a}_{50:\overline{20}|} - 1/4 = 11.208095$$

$$10000P_{50:\overline{20}|}^{(2)} = 313.55$$

$$10000P^{(2)}(A_{50:\overline{20}|}) = 316.44$$

［例 4.5.2］ 现年为 40 岁者，投保一份保险金额为 5000 元的全离散式的 25 年定期寿险保单，试利用换算函数表和预定年利率 $i = 6\%$，并在 UDD 假设条件下，计算：

(1)普通年缴纯保费；

(2)季缴纯保费；

(3)月缴纯保费。

解：(1)普通年缴纯保费

$$5000P_{40:\overline{25}|}^{1} = 5000\frac{M_{40} - M_{65}}{N_{40} - N_{65}} = 22.93(\text{元})$$

先计算 $\ddot{a}_{40:\overline{25}|}$与 $\ddot{a}_{40:\overline{25}|}^{(4)}$、$\ddot{a}_{40:\overline{25}|}^{(12)}$

$$\ddot{a}_{40:\overline{25}|} = \frac{N_{40} - N_{65}}{D_{40}} = 13.117904$$

$$\alpha(4) = 1.000265495$$

$$\beta(4) = -0.384238622$$

$$\alpha(12) = 1.00028095$$

$$\beta(12) = -0.46811888$$

$${}_{25}E_{40} = \frac{D_{65}}{D_{40}} = 0.197327$$

$$A_{40:\overline{25}|}^{1} = \frac{M_{40} - M_{65}}{D_{40}} = 0.060149$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{25}|}^{(4)} = \alpha(4)\ddot{a}_{40:\overline{25}|} + \beta(4)(1 - {}_{25}E_{40})$$

$$= 13.121387 - 0.308418 = 12.812969$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{25}|}^{(12)} = \alpha(12)\ddot{a}_{40:\overline{25}|} + \beta(12)(1 - {}_{25}E_{40})$$

$$= 13.121589 - 0.375746 = 12.745843$$

(2) $$5000P_{40:\overline{25}|}^{1(4)} = 5000\cdot\frac{A_{40:\overline{25}|}^{1}}{\ddot{a}_{40:\overline{25}|}^{(4)}} = 23.47(\text{元})$$

故季缴纯保费是

$$P = \frac{5000P_{40:\overline{25}|}^{1(4)}}{4} = 5.87(\text{元})$$

(3) $5000P^{1(12)}_{40:\overline{25}|} = 5000 \cdot \dfrac{A^{1(4)}_{40:\overline{25}|}}{\ddot{a}^{(12)}_{40:\overline{25}|}} = 23.59$(元)

故月缴纯保费是

$$P = \frac{5000P^{1(12)}_{40:\overline{25}|}}{12} = 1.97(\text{元})$$

此题若应用传统的近似计算公式

$$\ddot{a}^{(m)}_{40:\overline{25}|} \approx \ddot{a}_{40:\overline{25}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_{25}E_{40})$$

则

$$\ddot{a}^{(4)}_{40:\overline{25}|} = 13.117904 - 0.301002 = 12.81692$$

$$\ddot{a}^{(12)}_{40:\overline{25}|} = 13.119904 - 0.367892 = 12.75002$$

从而，季缴纯保费是 $P = 5.87$ 元，月缴纯保费是 $P = 1.97$ 元。

[例 4.5.3] 年龄为 20 岁者，购买保险金额为 50000 元的寿险保单，试利用换算表的数值，以及年利率 $i = 0.06$，并在 UDD 假设条件下，计算下列保单的月缴纯保费：

(1)全离散式普通终身寿险；

(2)半连续式的 65 岁缴清的终身寿险；

(3)全离散式的 65 岁满期的普通两全保险。

解：(1)相关数值和终身寿险的趸缴纯保费

$$\ddot{a}_{20} = \frac{N_{20}}{D_{20}} = \frac{5130070}{306813.4} = 16.720489$$

$$\alpha(12) = 1.00028095$$

$$\beta(12) = -0.46811888$$

$$\ddot{a}^{(12)}_{20} = \alpha(12)\ddot{a}_{20} + \beta(12) = 16.257068$$

$$A_{20} = \frac{M_{20}}{D_{20}} = \frac{16432.23}{306813.4} = 0.0535558$$

故普通终身寿险的月缴纯保费是

$$P = 50000\frac{A_{20}}{12\ddot{a}^{(12)}_{20}} = 13.73(\text{元})$$

(2)先计算 $\ddot{a}^{(12)}_{20:\overline{45}|}$ 与 ${}_{45}P^{(12)}_{20}$

$$\ddot{a}_{20:\overline{45}|} = \frac{N_{20} - N_{65}}{D_{20}} = 16.102256$$

$${}_{45}E_{20} = \frac{D_{65}}{D_{20}} = 0.060419$$

$$\ddot{a}^{(12)}_{20:\overline{45}|} = \alpha(12)\ddot{a}_{20:\overline{45}|} + \beta(12)(1 - {}_{45}E_{20}) = 15.66694$$

$${}_{45}P^{(12)}_{20} = \frac{A_{20}}{\ddot{a}^{(12)}_{20:\overline{45}|}} = 0.003419$$

故半连续式的 65 岁缴清的终身寿险月缴纯保费是

$$\begin{aligned} P &= 50000\frac{i}{12\delta}{}_{45}P^{(12)}_{20} \\ &= 50000 \cdot 0.085809 \cdot 0.003419 \\ &= 14.67(\text{元}) \end{aligned}$$

(3)两全保险的趸缴纯保费

$$A_{20:\overline{45}|}=\frac{M_{20}-M_{65}+D_{65}}{D_{20}}=0.08855$$

故 65 岁满期的两全寿险的月缴纯保费是

$$P=50000\frac{A_{20:\overline{45}|}}{12\ddot{a}_{20:\overline{45}|}^{(12)}}=23.55(\text{元})$$

[例 4.5.4] 设 $\dfrac{P_{x:\overline{20}|}^{1(m)}}{P_{x:\overline{20}|}^{1}}=1.032$，且 $P_{x:\overline{20}|}=0.040$，试计算 $P_{x:\overline{20}|}^{(m)}$

解：因为 $P_{x:\overline{20}|}^{1(m)}=\dfrac{A_{x:\overline{20}|}^{1}}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}^{(m)}}$，　$P_{x:\overline{20}|}^{1}=\dfrac{A_{x:\overline{20}|}^{1}}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}}$

故

$$\frac{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}^{(m)}}=\frac{P_{x:\overline{20}|}^{1(m)}}{P_{x:\overline{20}|}^{1}}=1.032$$

且有

$$\frac{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}^{(m)}}=\frac{P_{x:\overline{20}|}^{(m)}}{P_{x:\overline{20}|}}=1.032$$

故

$$P_{x:\overline{20}|}^{(m)}=(0.040)(1.032)=0.04128$$

对于全离散式的其他寿险保单，每年给付 m 次的年均纯保费的换算表示式，也有类似公式

$$\left.\begin{aligned}
P_x^{(m)}&=\frac{M_x}{N_x^{(m)}}\\
P_{x:\overline{n}|}^{1(m)}&=\frac{M_x-M_{x+n}}{N_x^{(m)}-N_{x+n}^{(m)}}\\
P_{x:\overline{n}|}^{(m)}&=\frac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{N_x^{(m)}-N_{x+n}^{(m)}}\\
{}_hP_x^{(m)}&=\frac{M_x}{N_{x+h}^{(m)}}\\
{}_hP_{x:\overline{n}|}^{(m)}&=\frac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{N_x^{(m)}-N_{x+h}^{(m)}}
\end{aligned}\right\}\tag{4.5.2}$$

对于每年分 m 次缴付的半连续式寿险保单，其年均纯保费换算函数式是

$$\left.\begin{aligned}
P^{(m)}(\bar{A}_x)&=\frac{\bar{M}_x}{N_x^{(m)}}\\
P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1})&=\frac{\bar{M}_x-\bar{M}_{x+n}}{N_x^{(m)}-N_{x+n}^{(m)}}\\
P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})&=\frac{\bar{M}_x-\bar{M}_{x+n}+D_{x+n}}{N_x^{(m)}-N_{x+n}^{(m)}}\\
{}_hP^{(m)}(\bar{A}_x)&=\frac{\bar{M}_x}{N_{x+h}^{(m)}}
\end{aligned}\right\}\tag{4.5.3}$$

其中，$N_x^{(m)}=\frac{1}{m}\sum_{h=0}^{\infty}D_{x+h/m}$。

特别地，在 UDD 假设条件下，有

$$N_x^{(m)}=\alpha(m)N_x+\beta(m)D_x$$

在传统的近似计算公式下，有

$$N_x^{(m)}\approx N_x-\frac{m-1}{2m}D_x$$

§4.6 比例保费

上一节讨论分期缴付的年缴纯保费，其被保险人死亡保险金额不作调整，而本节讨论的问题是另一种类型的保费，即比例保费，它是根据死亡时间与下一次预定缴费时间间隔长短退还部分保费。在实际中，一般按比例计算，并不计利息。在这一节中，我们将考虑利息，并将年缴 m 次的保费序列看作第三章 §3.5 的比例期初生存年金。这些年缴 m 次的净均衡比例年保费符号与半连续式的分期保费符号相似，只不过上标 m 放在大括号内，例如 $P^{\{m\}}(\overline{A}_x)$。鉴于退还部分保费的特征，设保险金在死亡时立即给付。

我们仍以 h 年缴费 n 年期两全保险为例，说明缴 m 次的比例保费公式的建立过程。

从平衡原理导出

$$_hP^{\{m\}}(\overline{A}_{x:\overline{n|}})=\frac{\overline{A}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{h|}}^{\{m\}}}\tag{4.6.1}$$

利用例 3.5.1(2)可得

$$_hP^{\{m\}}(\overline{A}_{x:\overline{n|}})=\frac{(\overline{A}_{x:\overline{n|}})}{(\delta/d^{\{m\}})\overline{a}_{x:\overline{h|}}}=\frac{d^{(m)}}{\delta}\cdot{}_h\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n|}})\tag{4.6.2}$$

这意味着分 m 次年缴保费其每次摊付额为

$$\frac{1}{m}{}_hP^{\{m\}}(\overline{A}_{x:\overline{n|}})={}_h\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n|}})\frac{1-v^{1/m}}{\delta}={}_h\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n|}})\overline{a}_{\overline{1/m|}}\tag{4.6.3}$$

特别是，当 $m=1$ 时，有

$$_hP^{\{1\}}(\overline{A}_{x:\overline{n|}})={}_h\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n|}})\overline{a}_{\overline{1|}}\tag{4.6.4}$$

式(4.6.3)与式(4.6.4)表明：比例保费等价于按利息贴现至每一缴费周期之初的完全连续式寿险保费。对其他种类保费也有类似的公式。例如，令 h，$n\to\infty$，式(4.6.4)成为

$$P^{\{1\}}(\overline{A}_x)=\overline{P}(\overline{A}_x)\overline{a}_{\overline{1|}}\tag{4.6.5}$$

比例纯保费 $P^{\{1\}}(\overline{A}_x)$与半连续纯保费 $P(\overline{A}_x)$都在(x)活着时于每期期初缴费，在(x)死亡时都提供 1 单位保险金，所不同的是 $P^{\{1\}}(\overline{A}_x)$还对死亡者提供保费的部分退款。那么，差额

$$P^{\{1\}}(\overline{A}_x)-P(\overline{A}_x)\tag{4.6.6}$$

是否是保费退款受益在年初时年给付的均衡保费呢？

设保费退款受益的现值随机变量为$\overline{Y}$，则

$$\overline{Y}=\frac{P^{\{1\}}(\overline{A}_x)v^T\bar{a}_{\overline{K+1-T|}}}{\bar{a}_{\overline{1|}}}$$

根据平衡原理，为此受益而支付的趸缴纯保费记为$\overline{A}_x^{PR}$，则

$$\overline{A}_x^{PR}=P^{\{1\}}(\overline{A}_x)E\left[v^T\frac{\bar{a}_{\overline{K+1-T|}}}{\bar{a}_{\overline{1|}}}\right]$$

利用式(4.6.5)可得

$$\overline{A}_x^{PR}=\overline{P}(\overline{A}_x)E\left[\frac{v^T-v^{K+1}}{\delta}\right]=\overline{P}(\overline{A}_x)\left(\frac{\overline{A}_x-A_x}{\delta}\right) \tag{4.6.7}$$

从而相应的平均衡纯保费为

$$P(\overline{A}_x^{PR})=\frac{\overline{P}(\overline{A}_x)(\overline{A}_x-A_x)}{\delta\ddot{a}_x} \tag{4.6.8}$$

运用式(4.6.6)，由式(4.6.5)可得

$$\begin{aligned}P^{\{1\}}(\overline{A}_x)-P(\overline{A}_x)&=\overline{P}(\overline{A}_x)\frac{d}{\delta}-\frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_x}\\&=\overline{P}(\overline{A}_x)\left(\frac{d}{\delta}-\frac{\bar{a}_x}{\ddot{a}_x}\right)=\overline{P}(\overline{A}_x)\frac{d\ddot{a}_x-\delta\bar{a}_x}{\delta\ddot{a}_x}\\&=\overline{P}(\overline{A}_x)\frac{\overline{A}_x-A_x}{\delta\ddot{a}_x}=P(\overline{A}_x^{PR})\end{aligned} \tag{4.6.9}$$

这就证明了式(4.6.6)是保险退款受益的年缴纯保费。

公式(4.6.7)有以下解释：保费退款受益的精算现值等于(x)死亡时开始的与(x)死亡年末开始的年率(年支付额)为$\overline{P}(\overline{A}_x)$的连续型年金值之差。

以上分析可推广到每年分 m 次缴费的终身寿险。一般而言，$P^{\{m\}}(\overline{A})-P^{(m)}(\overline{A})$是退款受益的每年分 m 次缴费的年均衡纯保费。

[**例 4.6.1**] 如果例 4.5.1(2)采用保单比例保费，那么年衡纯保费增加多少？

解：每单位保险的比例年保费由式(4.6.2)给出

$$P^{\{2\}}(\overline{A}_{50:\overline{20|}})=\overline{P}(\overline{A}_{50:\overline{20|}})\frac{d^{(2)}}{\delta}=\frac{\overline{A}_{50:\overline{20|}}}{\bar{a}_{50:\overline{20|}}}\cdot\frac{d^{(2)}}{\delta}$$

根据死亡均匀分布假设，上式成为

$$\begin{aligned}P^{\{2\}}(\overline{A}_{50:\overline{20|}})&=\frac{(i/\delta)A^1_{50:\overline{20|}}+{}_{20}E_{50}}{\alpha(\infty)\ddot{a}^1_{50:\overline{20|}}+\beta(\infty)(1-{}_{20}E_{50})}\cdot\frac{d^{(2)}}{\delta}\\&=\frac{0.354674}{11.074944}\cdot0.985573\\&=0.031563\end{aligned}$$

$$\alpha(\infty)=id/\delta^2=1.00028$$

$$\beta(\infty)=(\delta-i)/\delta^2=-0.50985$$

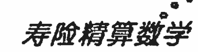
再加上例 4.5.1 中的有关数值，可得

$$10000P^{\{2\}}(\overline{A}_{50:\overline{20|}})=315.63$$

年缴纯保费增加额为

$$10000[P^{\{2\}}(\overline{A}_{50:\overline{20|}})-P^{(2)}(\overline{A}_{50:\overline{20|}})]=0.95$$

这就是退款受益的年缴纯保费。



§ 4.7 累积增额受益

本节分析的问题主要是针对在死亡年度末支付保险金的年缴纯保费情形而言的。假设(x)的 n 年人寿保险，其受益保险金额当死亡发生在第 $k+1$ 年时为 $\ddot{s}_{\overline{k+1}|}$，这个受益在保单签发时的现值随机变量为

$$W=\begin{cases} v^{K+1}\ddot{s}_{\overline{K+1}|j}=\dfrac{1}{d_{(j)}}[v^{K+1}(1+j)^{K+1}-1] & (0\leqslant K<n) \\ 0 & (K\geqslant n) \end{cases}$$

其中，保险人的现值按利率 i 计算，$d_{(j)}$是与利率 j 等价的(银行)贴现率。根据平衡原理，趸缴纯保费为

$$E[W]=\frac{A'^{1}_{x:\overline{n}|}-A^{1}_{x:\overline{n}|}}{d_{(j)}} \tag{4.7.1}$$

其中，$A'^{1}_{x:\overline{n}|}$按利率 $i'=(i-j)/(1+j)$计算。

如 $i=j$，则 $i'=0$,则趸缴纯保费转化为

$$\frac{{}_nq_x-A^{1}_{x:\overline{n}|}}{d}=\frac{1-{}_np_x-A_{x:\overline{n}|}+v^n{}_np_x}{d}=\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-{}_np_x\ddot{a}_{\overline{n}|} \tag{4.7.2}$$
$$=\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-{}_nE_x\ddot{s}_{\overline{n}|}$$

公式(4.7.2)表明，当 $j=i$ 时，除非(x)生存满 n 年，上述特殊定期寿险等价于一个 n 年期期初生存年金，在生存满 n 年时，上述生存年金在时间 n 年的积累值为$\ddot{s}_{\overline{n}|}$，那时该定期寿险提供的受益为0。

现考虑以下情形，(x)可以选择年缴保费 $P_{x:\overline{n}|}$的 n 年期单位受益两全保险，或者选择建立一个 n 年中每年年初存人 $1/\ddot{s}_{\overline{n}|}$的储蓄账户并购买一个特殊的递减定期寿险，该特殊保险当(x)在 n 年中死于第 $k+1$ 年时未提供受益

$$1-\frac{\ddot{s}_{\overline{k+1}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

显然，这一受益是两全保险的单位受益与储蓄账户的积累值之差。假定所有估计计算均使用同样的利率 i，那么两全保险提供的受益与上述特殊保险及储蓄账户联合提供的受益完全相当，因此，两全保险的年缴纯保费 $P_{x:\overline{n}|}$等于特殊定期寿险的年缴纯保费加上储蓄账户存人款 $1/\ddot{s}_{\overline{n}|}$。

为证实以上结论，考虑以上特殊递减定期寿险的现值随机变量

$$\widetilde{W}=\begin{cases} v^{K+1}\left(1-\dfrac{\ddot{s}_{\overline{K+1}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\right)=v^{K+1}-\dfrac{\ddot{a}_{\overline{K+1}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} & (0\leqslant K<n) \\ 0 & (K\geqslant n) \end{cases} \tag{4.7.3}$$

其趸缴纯保费记作$\widetilde{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$，由平衡原理得

$$\widetilde{A}^{1}_{x:\overline{n}|}=E[W]=A^{1}_{x:\overline{n}|}-\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-{}_np_x\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$$

$$= A^{1}_{x:\overline{n}|} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x\ddot{s}_{\overline{n}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$$

这一特殊定期寿险的年缴纯保费

$$\widetilde{P}^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{\widetilde{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = P^{1}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} + P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

$$= P_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$$

于是

$$P_{x:\overline{n}|} = \widetilde{P}^{1}_{x:\overline{n}|} + \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} \tag{4.7.4}$$

我们早就有

$$P_{x:\overline{n}|} = P^{1}_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

而式(4.7.4)又提供了$P_{x:\overline{n}|}$的另一分解，即分解为以上特殊定期寿险的年缴保费与储蓄账户存入额$1/\ddot{s}_{\overline{n}|}$，后者到 n 年末的积累值为 1。

[例 4.7.1]　考虑(x)的保险金额为 5000 元的 20 年定期寿险，当(x)在 20 年内死亡时，除保险金 5000 元外，同时还加上退还年缴纯保费积累值，受益在死亡年末支付，按以下两种情况分别导出年缴纯保费公式：

(1) 退还的年缴纯保费不计利息；

(2) 退还的年缴纯保费按计算保费时相同的利率累积。

解：(1)设 π_a 为所求保费，则

$$\pi_a\ddot{a}_{x:\overline{20}|} = 5000A^{1}_{x:\overline{20}|} + \pi_a(IA)^{1}_{x:\overline{20}|}$$

$$\pi_a = 5000\frac{A^{1}_{x:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|} - (IA)^{1}_{x:\overline{20}|}}$$

(2)设 π_b 为所求保费，利用式(4.7.2)可得

$$\pi_b\ddot{a}_{x:\overline{20}|} = 5000A^{1}_{x:\overline{20}|} + \pi_b(\ddot{a}_{x:\overline{20}|} - {}_{20}E_x\ddot{s}_{\overline{20}|})$$

$$\pi_b = 5000\frac{A^{1}_{x:\overline{20}|}}{{}_{20}E_x\ddot{s}_{\overline{20}|}} = 5000\frac{A^{1}_{x:\overline{20}|}}{{}_{20}p_x\ddot{a}_{\overline{20}|}}$$

在实践中，毛保费会被退还，有关公式需考虑到这一因素。

[例 4.7.2]　考虑(x)的一份从 $x+n$ 岁开始领取年金额为 1 元的延期生存年金，其年缴纯保费在递延期内支付，并且在缴费期内死亡时，在死亡年度末归还年缴纯保费的积累额，决定其年缴纯保费。

解：令年缴纯保费的精算现值 π 等于受益的精算现值，有

$$\pi\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_nE_x\ddot{a}_{x+n} + \pi(\ddot{a}_{x+n} - {}_nE_x\ddot{s}_{\overline{n}|})$$

其中右端的第二项来自式(4.7.2)，由此解得

$$\pi = \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$$

习　题　四

1. 设保险金额为 2500 元，保单于 35 岁时签发。试在全离散式下求下列各种保单的年

缴纯保费：

(1) 普通终身寿险；

(2) 25 年限期缴清保费的终身寿险；

(3) 在 65 岁时缴清保费的终身寿险。

2. 设保险金额为 1500 元，保单于 40 岁时签发。试在全离散式下求下列各种保单的年缴纯保费：

(1) 20 年定期寿险；

(2) 20 年普通两全保险；

(3) 85 岁满期的普通两全保险；

(4) 85 岁满期 20 年限期缴清保费的两全保险。

3. 设 $P_{35:\overline{20|}}=0.042$，${}_{20}P_{35}=0.0299$，$A_{55}=0.6099$。试求 $P^{1}_{35:\overline{20|}}$与 $P_{35:\overset{\ 1}{\overline{20|}}}$。

4. 试证：

(1) $P_x=\dfrac{dA_x}{1-A_x}$；

(2) $P_{x:\overline{n|}}=\dfrac{dA_{x:\overline{n|}}}{1-A_{x:\overline{n|}}}$。

并用文字作直观解释。

5. 试证：

$$P_{x:\overline{n|}}={}_nP_x+P_{x:\overset{\ 1}{\overline{n|}}}(1-A_{x+n})$$

并用文字作直观解释。

6. 现年 30 岁者，以现款缴付 2000 元，并于一年后每年缴付年缴保费 100 元，购买一张普通终身寿险保单，试求该保险单的保险金额。

7. 某人现年 27 岁，于 3 年前投保 20 年两全保险，年缴纯保费为 100 元。试求此保险单的保险金额。

8. 设 35 岁限期缴清保费的终身生存年金保单于 25 岁时签发，年金为 3600 元，于 65 岁时开始给付。试求其年缴纯保费。

9. 设 60 岁时缴清保费的终身生存年金保单于 20 岁签发，年金额为 5000 元，于满 65 岁时开始给付。试求该保单的年缴纯保费。

10. 终身寿险保单的保险金额为 5000 元，于 20 岁时开始缴费。设前 10 次年缴保费期间并不在保险期内，保险期直至被保险人 30 岁时始生效力。试求其年缴纯保费。

11. 某人寿保险单在 32 岁时签发，规定年缴保费 28 次，若被保险人在满 65 岁以前死亡，死亡给付为 5000 元；若被保险人在 65 岁以后死亡，则死亡给付为 3000 元。试求其年缴纯保费。

12. 某人寿保险单在 40 岁时签发，并规定：若签发保单后的 10 年内死亡，则死亡给付金额为 2000 元；若在以后相继的 10 年内死亡，则死亡给付金额为 3000 元。试求该保单的年缴纯保费。

13. 某人寿保险单在 25 岁时签发，并规定：年缴保费为 10 次，若被保险人在签单后的 15 年内死亡，则给付金额为 2000 元；若被保险人在 15 年以后死亡，则给付金额为 3500 元。试求其年缴纯保费。

14. 设 $A_x=0.190, {}^2A_x=0.064$，$d=0.057$。

(1) 计算年缴纯保费 P_x。

(2) 保险金额为 1 元的终身寿险在全离散式下保险损失 L 的标准差。

15. 试证：在死力 $\mu_{x+t}=\mu$ 为常值的条件下，

$$\overline{P}(\overline{A}_x)=\mu$$

16. 假设死力 μ_x 是 x 的严格递增函数，试证：

$$\overline{P}(\overline{A}_x)>\mu_x$$

17. 假设利力 $\delta=0$，试证：

$$\overline{P}(\overline{A}_x)=\frac{1}{\mathring{e}_x}$$

18. 试证：

$$\left(1+\frac{d\bar{a}_x}{dx}\right)\overline{P}(\overline{A}_x)-\frac{d\overline{A}_x}{dx}=\mu_x$$

19. 设 $L=1000v^T-10\bar{a}_{\overline{T}|}$为年龄 x 岁者签发全连续式终身寿险保单的保险损失，未来寿命 T 的概率密度函数为

$$f_T(t)=\frac{2t}{2500}(0\leqslant t\leqslant 50)$$

利力 $\delta=0.05$。

(1) 计算 $E(L)$。

(2) 当 T 取何值时，保险损失 $L=0$。

(3) 计算保险人遭受损失的概率。

(4) 年缴纯保费定为多少时，才使保险人不亏损的概率为 0.5。

20. 试在 UDD 假设条件下，证明：

(1) $\overline{P}(\overline{A}_x)=\dfrac{i\delta M_x}{idN_x+(\delta-i)D_x}$

(2) $\overline{P}(\overline{A}^1_{x:\overline{n}|})=\dfrac{i\delta(M_x-M_{x+n})}{id(N_x-N_{x+n})+(\delta-i)(D_x-D_{x+n})}$；

(3) $\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}|})=\dfrac{i\delta(M_x-M_{x+n})+\delta^2D_{x+n}}{id(N_x-N_{x+n})+(\delta-i)(D_x-D_{x+n})}$。

21. 设预定年利率，$i=6\%$ 试在 UDD 假设条件下，利用换算表的数值计算：

(1) $\overline{P}(\overline{A}_{35})$；(2) $\overline{P}(\overline{A}^1_{35:\overline{25}|})$；(3) $\overline{P}(\overline{A}_{35:\overline{25}|})$。

22. 假设死力 $\mu_{x+t}=\mu$ 为常值，利力为 δ，试简化表达式：

$$\frac{{}^2\overline{A}_x-\overline{A}_x}{(\delta\bar{a}_x)^2}$$

23. 设年龄为 35 岁者，购买保险金额为 2500 元的半连续式寿险保单，试在 UDD 假设条件下，计算下列保单的年缴纯保费(年利率 $i=6\%$)：

(1) 普通终身寿险；

(2) 25 年限期缴清保费的终身寿险；

(3) 25 年定期寿险；

(4) 25 年的普通两全保险；

(5) 15 年限期缴清保费 25 年两全保险。

24. 设年龄为 35 岁者，购买一张全离散式的 65 岁的满期的定期寿险保单，保险金额为 3500 元。试利用换算表的数值，并在 UDD 假设条件下，计算：

(1) 该保单的趸缴纯保费；

(2) 该保单的年缴纯保费；

(3) 该保单的季缴纯保费；

(4) 该保单的月缴纯保费。

25. 设年龄为 25 岁的人，以月缴保费的方式，购买一张 60 岁满期的全离散式两全保险保单，月缴纯保费为 5 元。试利用换算表的数值，应用下列条件或方法，分别计算该保单的保险金额：

(1) 应用 UDD 假设条件；

(2) 应用传统的近似计算公式。

26. 设年龄为 23 岁的人，以月缴保费的方式，购买一张 65 岁缴清保费的半连续式终身寿险保单，月缴纯保费 3.5 元。试利用换算表的数值及年利率 $i=6\%$，应用下列条件或方法，分别计算该保单的保险金额：

(1) 应用 UDD 假设条件；

(2) 应用传统的近似计算方法；

27. 试利用 $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$的不同表示式，证明：

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}/\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

可以分别表示为下列形式：

(1) $\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}+\beta(m)P_{x:\overline{n}|}^{1}$;

(2) $\alpha(m)+\beta(m)(P_{x:\overline{n}|}^{1}+d)$;

(3) $1-\dfrac{m-1}{2m}(P_{x:\overline{n}|}^{1}+d)$。

28. 设年龄为 25 岁者，签发一终身寿险保单，并规定：

(1) 被保险人若投保后前 10 年内死亡，则给付死亡金额 1 元；若于投保 10 年后死亡，则给付死亡金额 2 元。

(2) 前 10 年的年缴纯保费是以后年缴纯保费的一半。

(3) 保费于被保险人 65 岁时缴清。

(4) 保险金额于被保险人死亡的保单年末支付。

试用换算函数表示初始时的年缴纯保费。

29. 设年龄为 20 岁者，签发一离散式寿险保单，规定 10 年限期缴费。若在缴费期限内被保险人死亡，则死亡给付金额为 1000 元；若在 30 至 50 岁之间死亡，则给付金额为 3000 元；若在 50 岁至 70 岁之间死亡，则给付金额为 2000 元；如果被保险人生存至 70 岁，则给付金额为 1000 元。试用换算函数表示其年缴纯保费。

30. 一儿童两全保险保单于 1 岁时签发，并规定：若第一年死亡，则给付 100 元；若第二年死亡，则给付 200 元；若第三年死亡，则给付 300 元，如此每年递增，直至最高给付 1000 元。保单至 20 岁满期，满期给付 1000 元。试以函数表示其年缴纯保费。

第五章

均衡纯保费责任准备金

本章主要内容： 本章使用过去法和未来法两种计算方式来阐明责任准备金的计算原理，并将过去法和未来法运用到全连续式、全离散式和半连续式三种寿险模型中，分别导出各种情况下责任准备金的计算方法。之后对每年分 m 次缴费的责任准备金和比例责任准备金的计算加以说明，最后介绍了亏损按各保险年度分摊的具体操作。

本章主要词汇： 责任准备金　过去法　未来法　法克勒氏公式

§5.1　责任准备金的计算原理

第四章介绍了年均衡纯保费的计算，那么，保险公司当年收取的纯保费总额与该年度给付保险金的总额之差是否是该年度的盈余(或利润)呢？回答是否定的。这是因为平衡原理对保险合同整个期限来说是收支相等的，但对于某一年度来说，则未必会收支相等，这是由于保险合同全期间的纯保费已均衡化了，而保险给付金并未能均衡化。纯保费均衡化后，对保险合同整个期限来说，前期自然保费(或支出)小于均衡纯保费，而后期自然保费(或支出)大于均衡纯保费。保险公司为了保证后期偿付能力，就必须将前期的差额适当地加以提存，以备填补后期的数额不足，以防止保险公司破产并保障保单持有人权益的实现。

为便于读者理解，以图 5.1 作进一步的说明：A_x 均衡化后成为年均衡纯保费 P_x，P_x 成一条水平线，而自然保费(死亡成本)c_x 是随被保险人年龄的增长而呈阶梯状递增的。从图中可以看出，前期自然保费(死亡成本)c_x 小于均衡纯保费 P_x，所形成的差额即为图

中的阴影部分，该部分差额会作为责任准备金，完全用于弥补后期自然保费超过均衡纯保费的差额。

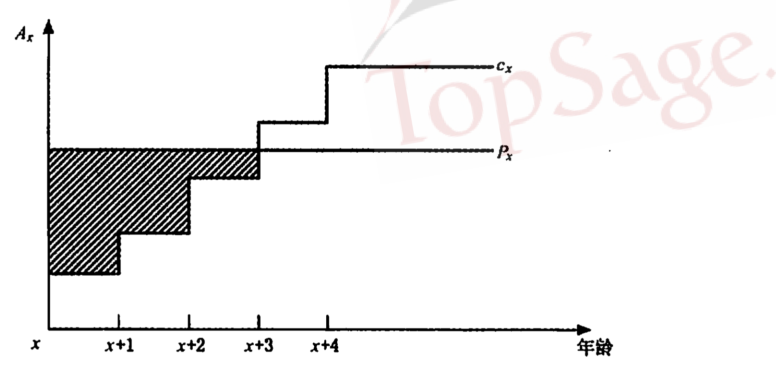


图 5.1　均衡纯保费说明

5.1.1　责任准备金的概念

人寿保险公司在营业年度(即会计年度)届满时，应分别按保险的种类进行会计决算。保险人为了保持平衡关系，必须提存各种责任准备金，记载于特定的会计科目。所谓责任准备金，是指保险人为了平衡未来将发生的债务而提存的款项，是保险人所欠被保险人的债务。未来会发生的债务包括：保险金的支付，保险合同解约的退保金，以及保险人停止营业时将合同转移给其他保险人所需的再保费等。总而言之，责任准备金就是保险人为了负起保险合同上的责任而提存的款额。读者应注意的是，责任准备金与资本公积金、坏账准备、退休金准备等在性质上是不同的。

为了使保险公司能够切实履行各种给付义务，我国保险法明确规定了保险监管部门要经常对保险公司的准备金提存及资金运用的安全性予以监督。我国 1995 年 6 月 30 日颁布的《中华人民共和国保险法》第九十三条规定：经营有人寿保险业务的保险公司，应当按照有效的人寿保险单的全部净值提取未到期责任准备金。1996 年 7 月 25 日颁布的《保险管理暂行规定》第二十七条规定：人寿保险业务的未到期责任准备金按有效的人寿保险单的全部净值提取。2002 年 10 月 28 日，全国人民代表大会常务委员会通过新的《中华人民共和国保险法》，其中第九十四条规定：保险公司应当根据保障被保险人利益、保证偿付能力的原则提取各项责任准备金。2005 年 1 月，中国保险监督管理委员会印发的关于《精算报告》的通知中明确要求精算责任人对于责任准备金及相关精算项目计提基础的具体描述必须按各保险业务类别(包括分红保险业务和独立账户业务)选择适当的描述方式，以便能够清晰地阐明各业务分类的准备金计算基础。另外，除中国保险监督管理委员会规定可以不需要进行准备金/资产充足性分析的情况外，各公司都应当进行准备金/资产充足性分析。其中现金流分析法是最常用的准备金/资产充足性的分析方法。如果精算责任人根据准备金/资产充足性分析的结果，认为公司在现计提的准备金之外有设立额外准备金的需要，那么保险公司应当设立此额外准备金。

对于责任准备金，本章就其产生的基本原理，将从数理的角度加以说明，并通过实例介绍其计算原理，以加深读者对责任准备金的理解。

5.1.2　责任准备金的计算原理

下面以全离散式5年定期寿险为例加以说明。

[例5.1.1]　假设年龄为30岁的男性，购买保险金额为10000元的5年定期寿险的保单，试利用附录Ⅲ(CL1非养老金业务男性表)的换算表数值，在预定年利率 $i=2.5\%$ 的情况下考察每年的纯保费收入与保险金给付的情况。

解：首先考虑纯保费，保险金额为10000元的5年定期寿险，其年缴均衡纯保费为

$$10000P_{30:\overline{5|}}^{1}=10000\frac{M_{30}-M_{35}}{N_{30}-N_{35}}$$

$$=10000\frac{151120.1-149079.7}{14058072-11709543}$$

$$=8.69(\text{元})$$

根据附录Ⅲ(CL1非养老金业务男性表)，购买此种保单的人数有986268人，则纯保费收入为8570668.90元，以预定年利率 $i=2.5\%$ 计算，至保单年度末共积存8784935.60元，而在此保单年度内共死亡804人，则在该年度末保险金的给付为8040000元，从而第一保单年度末的金额是744935.60元，平均每个生存者分得(也称单价)0.76元，即在第一个保单年度末每一保单应有的准备金。表5－1便是此种寿险保单中直至满期的各年度准备金应提存的数额。

表5－1　　10000元保额的5年定期寿险保单各年度提取准备金数额

年度	1	2	3	4	5
年初预期余额	8570668.90	9308626.40	9797820.30	9921701.00	9540710.00
年末预期积累	8784935.60	9541342.10	10042766.00	10169744.00	9779227.80
预期死亡给付	8040000.00	8300000.00	8670000.00	9170000.00	9770000.00
年末预期余额	744935.60	1241342.10	1372765.80	999743.55	9227.80
每张保单价值	0.76	1.26	1.40	1.02	0.0094

注：从理论上讲，第5个保单年度末时保单价值应等于0，而此处实际上并非为0的原因，乃是在计算时尾数四舍五入所致。

例5.1.1计算的过程，说明的是追溯过去缴费与给付在各保单年度末时结算的情形(但并非会计年度末的结算)。此种计算准备金的方法，称为已缴保费推算法或过去法。我们也可以将上例计算过程归纳为

时刻 t 时的准备金＝已缴纯保费在时刻 t 时的精算积累值

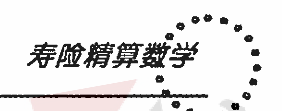
－以往保险利益在时刻 t 时的精算积累值

这里所说的精算积累值，除了按年利率 i 计息积累外，还包含有期望及其他因素。

采用过去法计算准备金虽便于理解，但计算较复杂繁琐，有了电子计算机作为计算工具便简单化了。但为便于计算在某一个保单年度末的责任准备金，通常不采用这种方法，而常用所谓的未缴保费推算法，常称未来法。它是采用将来应给付保险金在结算日的现值减去将来可收取的纯保险费在结算日的现值的方法来计算准备金的，即

时刻 t 时的准备金＝未来保险利益在时刻 t 时的精算现值

－未缴纯保费在时刻 t 时的精算现值



读者可以自行证明，采用过去法与未来法计算的责任准备金的结果是一致的。过去法与未来法的等价关系，说明了责任准备金实际上是保险人在时刻 t 时的未来损失的期望值。

而在进行数值计算时，使用未来法还是过去法，有以下两条指导原则：

(1) 在持续时间超出缴费期时，倾向于使用未来法。此时，责任准备金简化为未来应付保险金的精算现值。例如，对缴费期为 h 年的终身寿险当 $t \geqslant h$ 时，${}_t^h\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+t}$

(2) 在尚未发生保险金给付的缴费期内，倾向于使用过去法。此时，责任准备金简化为过去纯保费的精算积累值。例如，对于延期 n 年的年金当 $t < n$ 时，${}_t\bar{V}({}_{n|}\bar{a}_x) = \bar{P}({}_{n|}\bar{a}_x)\bar{s}_{x:\overline{t|}}$

§5.2 全离散式寿险模型责任准备金

上一节本书通过具体的实例说明了纯保费责任准备金的产生与计算原理，以及责任准备金的计算方法。本节将采用精算符号导出计算均衡纯保费责任准备金的一般公式。

5.2.1 过去法

假设：x 表示签单时被保险人的年龄；

K 表示自签单生效日起，至计算责任准备金时止，保单所经过的整年数；

P 表示保险金额为 1 个单位，在 x 岁签单时的年缴均衡纯保费；

${}_kV$ 表示该保单在第 k 个保单年度末时的责任准备金，简称期末责任准备金，则期末纯保费责任准备金为

$${}_kV = \frac{P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{k|}}}{{}_kE_x} - \frac{A^1_{x:\overline{k|}}}{{}_kE_x} = \frac{P(N_x - N_{x+k})}{D_{x+k}} - \frac{M_x - M_{x+k}}{D_{x+k}} \tag{5.2.1}$$

其中，${}_kE_x = A_{x:\overline{k|}}^{\ \ \ 1}$称为精算折现因子，而将 $1\big/{}_kE_x$ 称为精算积累因子。

对于公式(5.2.1)，读者可以采用数学归纳法证明。

[例 5.2.1] 假设保险金额为 1000 元，对 30 岁男性签发的保单。利用附录Ⅲ(CL1 非养老金业务男性表)的换算表数值，在年利率 $i = 2.5\%$ 的情况下，试计算下列各种保单第 15 个保单年度末的期末准备金：

(1) 普通终身寿险；

(2) 20 年限期缴费的终身寿险；

(3) 65 岁满期的两全保险；

(4) 20 年限期缴费 65 岁满期的两全保险；

(5) 65 岁满期的定期寿险。

解： (1) 因
$$P_{30} = \frac{M_{30}}{N_{30}} = 0.0107947$$

故
$${}_{15}V_{30} = \frac{P_{30}(N_{30} - N_{45})}{D_{45}} - \frac{M_{30} - M_{45}}{D_{45}} = 0.17766$$

故该保单在第 15 个保单年度的期末准备金是

$$1000 \cdot {}_{15}V_{30} = 1000 \times 0.17766 = 177.66(\text{元})$$

(2) 因
$$ {}_{20}P_{30}=\frac{M_{30}}{N_{30}-N_{50}}=0.0193412 $$
故
$$ {}_{15}^{20}V_{30}=\frac{{}_{20}P_{30}(N_{30}-N_{45})}{D_{45}}-\frac{M_{30}-M_{45}}{D_{45}}=0.337524 $$
故该保单在第 15 个保单年度的期末准备金是
$$ 1000\cdot{}_{15}^{20}V_{30}=1000\times0.337524=337.524(\text{元}) $$

(3) 因
$$ P_{30:\overline{35|}}=\frac{M_{30}-M_{65}+D_{65}}{N_{30}-N_{65}}=0.0188846 $$
故
$$ {}_{15}V_{30:\overline{35|}}=\frac{P_{30:\overline{35|}}(N_{30}-N_{45})}{D_{45}}-\frac{M_{30}-M_{45}}{D_{45}}=0.32903 $$
故该保单在第 15 个保单年度的期末准备金是
$$ 1000\cdot{}_{15}V_{30:\overline{35|}}=1000\times0.32903=329.03(\text{元}) $$

(4) 因
$$ {}_{20}P_{30:\overline{35|}}=\frac{M_{30}-M_{65}+D_{65}}{N_{30}-N_{50}}=0.02759 $$
故
$$ {}_{15}^{20}V_{30:\overline{35|}}=\frac{{}_{20}P_{30:\overline{35|}}(N_{30}-N_{45})}{D_{45}}-\frac{M_{30}-M_{45}}{D_{45}}=0.49101 $$
故该保单在第 15 个保单年度的期末准备金是
$$ 1000\cdot{}_{15}^{20}V_{30:\overline{35|}}=1000\times0.49101=491.01(\text{元}) $$

(5) 因
$$ P^{1}_{30:\overline{35|}}=\frac{M_{30}-M_{65}}{N_{30}-N_{65}}=0.0027624 $$
故
$$ {}_{15}V^{1}_{30:\overline{35|}}=\frac{P^{1}_{30:\overline{35|}}(N_{30}-N_{45})}{D_{45}}-\frac{M_{30}-M_{45}}{D_{45}}=0.02903 $$
故该保单在第 15 个保单年度的期末准备金是
$$ 1000\cdot{}_{15}V^{1}_{30:\overline{35|}}=1000\times0.02903=29.03(\text{元}) $$

5.2.2 未来法

从未来法来看，期末责任准备金是保险人在时刻 k 时的未来损失的期望值。下面以保险金额为 1 单位的普通终身寿险为例，考察其在时刻 k 时的期末责任准备金。假设签发该保单时被保险人的年龄为 x 岁，被保险人的年龄为 $x+k$ 岁时的未来寿命周年数用随机变量 J 表示，则其概率密度分布为

$$ {}_{J}p_{x+k}\cdot q_{x+k+J}\quad(J=0,1,2,\cdots) $$

保险人在时刻 k 时的未来损失是

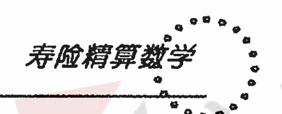
$$ {}_{k}L=v^{J+1}-P_{x}\cdot\ddot{a}_{\overline{J+1|}} \tag{5.2.2} $$

记 ${}_{k}V_{x}=E({}_{k}L)$，则

$$ \begin{aligned} {}_{k}V_{x}&=E(v^{J+1})-P_{x}\cdot E(\ddot{a}_{\overline{J+1|}})\\ &=A_{x+k}-P_{x}\cdot\ddot{a}_{x+k} \end{aligned} \tag{5.2.3} $$

读者可以验证，随机变量 ${}_{k}L$ 的方差是

$$ \begin{aligned} Var[{}_{k}L]&=Var\left[V^{J+1}\left(1+\frac{P_{x}}{d}\right)\right]=\left(1+\frac{P_{x}}{d}\right)^{2}Var[V^{J+1}]\\ &=\left(1+\frac{P_{x}}{d}\right)^{2}[{}^{2}A_{x+k}-(A_{x+k})^{2}]\cdots \end{aligned} \tag{5.2.4} $$



[例 5.2.2] 假设年龄为 30 岁的男性，购买保险金额为 1000 元的普通终身寿险保单，利用附录Ⅲ(CL1 非养老金业务男性表)的换算表数值，在年利率 $i=2.5\%$ 的情况下，试用未来法计算在第 15 个保单年度的期末责任准备金。

解：因
$$P_{30}=\frac{M_{30}}{N_{30}}=0.0107947$$
故
$${}_{15}V_{30}=A_{45}-P_{30}\ddot{a}_{45}=0.17766$$
故该保单在第 15 个保单年度的期末准备金是

$1000\cdot{}_{15}V_{30}=1000\times0.17766=177.66$(元)

[例 5.2.3] 试证明：${}_kV_x=A_{x+k}\left(1-\frac{P_x}{P_{x+k}}\right)$

证明：由公式(4.2.3)知
$${}_kV_x=A_{x+k}-P_x\ddot{a}_{x+k}$$
又因 $P_x=\frac{A_x}{\ddot{a}_x}$，从而，有
$$\begin{aligned}{}_kV_x&=A_{x+k}\left(1-P_x\cdot\frac{\ddot{a}_{x+k}}{A_{x+k}}\right)\\&=A_{x+k}\left(1-\frac{P_x}{P_{x+k}}\right)\end{aligned}\tag{5.2.5}$$
常见险种的期末责任准备金的记号及未来法计算公式见表 5-2。

表 5-2　　期末责任准备金的未来法计算公式

险　别	符　号	未来法计算公式	
终身寿险	${}_kV_x$	$A_{x+k}-P_x\ddot{a}_{x+k}$	
n 年定期寿险	${}_kV^1_{x:\overline{n}\|}$	$A^1_{x+k:\overline{n-k}\|}-P^1_{x:\overline{n}\|}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\|}$ 0	$k<n$ $k=n$
n 年两全保险	${}_kV_{x:\overline{n}\|}$	$A_{x+k:\overline{n-k}\|}-P_{x:\overline{n}\|}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\|}$ 1	$k<n$ $k=n$
缴费期为 h 年的终身寿险	${}^h_kV_x$	$A_{x+k}-{}_hP_x\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\|}$ A_{x+k}	$k<h$ $k\geqslant h$
缴费期为 h 年的 n 年两全保险	${}^h_kV_{x:\overline{n}\|}$	$A_{x+k:\overline{n-k}\|}-{}_hP_{x:\overline{n}\|}\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\|}$ $A_{x+k:\overline{n-k}\|}$ 1	$k<h$ $h\leqslant k<n$ $k=n$
n 年生存保险	${}_kV_{x:\overset{1}{\overline{n}\|}}$	$A_{x+k:\overset{1}{\overline{n-k}\|}}-P_{x:\overset{1}{\overline{n}\|}}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\|}$ 1	$k<n$ $k=n$
延期 h 年的终身生存年金	${}_kV({}_{h\|}\ddot{a}_x)$	$\ddot{a}_{x+h}$ $\ddot{a}_{x+k}-P({}_{h\|}\ddot{a}_x)\cdot\ddot{a}_{x+k:\overline{k-h}\|}$	$k<h$ $k\geqslant h$

表 5-2 中的未来法计算公式，读者可视为练习，给予验证。

[例 5.2.4] 假设年龄为 x 岁者，购买保险金额为 1 个单位的 n 年两全保险保单。记 ${}_kL$ 为保险人在第 k 个保单年度末时的未来损失。试计算：

(1) ${}_kL$ 的期望值 $E[{}_kL]$;

(2) ${}_kL$ 的方差 $Var[{}_kL]$。

解：假设随机变量 J 表示年龄为 $x+k$ 岁时未来寿命的周年数，则未来损失 ${}_kL$ 为

$$
{}_kL = \begin{cases} v^{J+1} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{J+1}|} & (J < n-k) \\ v^{n-k} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{n-k}|} & (J \geqslant n-k) \end{cases}
$$

记随机变量 Z 为

$$
Z = \begin{cases} v^{J+1} & (J < n-k) \\ v^{n-k} & (J \geqslant n-k) \end{cases}
$$

则

$$
{}_kL = \left(1 + \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\right)Z - \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}
$$

故

$$
\begin{aligned}
E[{}_kL] &= \left(1 + \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\right)E[Z] - \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d} \\
&= \left(1 + \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\right)A_{x+k:\overline{n-k}|} - \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d} \\
&= A_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|}\left(\frac{1}{d} - \frac{A_{x+k:\overline{n-k}|}}{d}\right) \\
&= A_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \qquad (5.2.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var[{}_kL] &= Var\left[\left(1 + \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\right)Z - \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\right] \\
&= \left(1 + \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\right)^2 Var[Z] \\
&= \left(1 + \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\right)^2 [{}^2A_{x+k:\overline{n-k}|} - (A_{x+k:\overline{n-k}|})^2]
\end{aligned}
$$

比照公式(5.2.5)，公式(5.2.6)可以表示为

$$
\begin{aligned}
{}_kV_{x:\overline{n}|} &= A_{x+k:\overline{n-k}|}\left(1 - \frac{P_{x:\overline{n}|}}{P_{x+k:\overline{n-k}|}}\right) \\
&= (P_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|})\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \qquad (5.2.7)
\end{aligned}
$$

一般地，对于年龄 x 岁者签约全离散式寿险保单，其期末责任准备金的计算，可作如下考虑。假设全离散式一般寿险保单为：

(1) 纯保费于每个保单年度初缴付一次，每次缴付纯保费为 $\pi_{j-1}(j=1, 2, \cdots)$。

(2) 保险金给付于死亡发生保单年度末支付，每个保单年度末的死亡给付额为 $b_j(j=1, 2, \cdots)$。

则在第 k 个保单年度末时，保险人的未来损失 ${}_kL$ 是

$$
{}_kL = b_{k+J+1}v^{J+1} - \sum_{h=0}^{J} \pi_{k+h}v^h \qquad (5.2.8)
$$

记 ${}_kV$ 为第 k 个保单年度的期末责任准备金，则

$$
{}_kV = E[{}_kL] = \sum_{j=0}^{\infty} \left[b_{k+j+1}v^{j+1} - \sum_{h=0}^{j} \pi_{k+h} \right]_{j|}q_{x+k}
$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} b_{k+j+1} v^{j+1} \cdot {}_{j|}q_{x+k} - \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{h=0}^{j} \pi_{k+h} v^h \right) {}_{j|}q_{x+k}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} b_{k+j+1} v^{j+1} \cdot {}_{j|}q_{x+k} - \sum_{h=0}^{\infty} \pi_{k+h} v^h {}_{h|}p_{x+k} \qquad (5.2.9)$$

式(5.2.9)表明：期末责任准备金${}_kV$等于未来保险金给付额在第k个保单年度末的精算现值与未来缴纳纯保费在第k个保单年度初的精算现值之差。

5.2.3 期初责任准备金与期中责任准备金

保单在某保单年度的期末责任准备金，是指在该保单年度结束时，而次年度保费尚未缴付时的准备金。而保单在某保单年度的期初责任准备金，是指在该保单年度开始时，本保单年度的保险费已缴付的责任准备金。若以${}_k(IV)$表示第k个保险年度的期初责任准备金，则

$${}_k(IV) = {}_{k-1}V + P \qquad (5.2.10)$$

其中，P为第k个保险年度初时缴付的年缴纯保费。

一般地，年龄为x岁时签约全离散式寿险保单，在第$j+1$个保单年度按期初付方式缴付的年缴纯保费为π_j，相应地，在第$j+1$个保单年度末给付的保险金为$b_j(j=0,1,2,\cdots)$，则该保单在$k+s$年(其中k为非负整数，$0<s<1$)处的准备金为

$${}_{k+s}V = b_{k+1} v^{1-s} {}_{1-s}q_{x+k+s} + {}_{k+1}V v^{1-s} {}_{1-s}p_{x+k+s} \qquad (5.2.11)$$

在 UDD 假设条件下，则

$${}_{1-s}q_{x+k+s} = \frac{(1-s)q_{x+k}}{1-s\cdot q_{x+k}}$$

$${}_{1-s}p_{x+k+s} = 1 - {}_{1-s}q_{x+k+s} = 1 - \frac{(1-s)q_{x+k}}{1-s\cdot q_{x+k}}$$

$$= \frac{p_{x+k}}{1-s\cdot q_{x+k}}$$

故
$${}_{k+s}V = \frac{v^{1-s}}{1-s\cdot q_{x+k}}\left[(1-s)b_{k+1}q_{x+k} + {}_{k+1}V\cdot p_{x+k}\right]$$

可以证明，有

$$b_{k+1}q_{x+k} = ({}_kV + \pi_k)(1+i) - {}_{k+1}V\cdot p_{x+k}$$

故
$${}_{k+s}V = \frac{v^{1-s}}{1-s\cdot q_{x+k}}\left[(1-s)({}_kV+\pi_k)(1+i) + {}_{k+1}V\cdot s\cdot p_{x+k}\right] \qquad (5.2.12)$$

在寿险实务中，式(5.2.12)通常被简化。假定年利率i与q_{x+k}很小，则p_{x+k}、v^{1-s}及$(1-s\cdot q_{x+k})$均近似于数1。从而得近似公式

$${}_{k+s}V \approx (1-s)({}_kV+\pi_k) + {}_{k+1}V\cdot s \qquad (5.2.13)$$

式(5.2.13)实际上是第$k+1$个年度的期初责任准备金$({}_kV+\pi_k)$与期末责任准备金${}_{k+1}V$的近似线性插值表达式。式(5.2.13)通常也称为非整数期的责任准备金近似计算公式。

特别地，当$s=\frac{1}{2}$时，则

$${}_{k+\frac{1}{2}}V = \frac{1}{2}({}_kV + {}_{k+1}V) + \frac{1}{2}\pi_k \qquad (5.2.14)$$

此时，称 ${}_{k+\frac{1}{2}}V$ 为第 $k+1$ 个保单年度的期中纯保费责任准备金。

式(5.2.13)也可写成

$$ {}_{k+s}V \approx (1-s)\,{}_kV + {}_{k+1}V \cdot s + (1-s)\pi_k \tag{5.2.15}$$

其中，$(1-s)\pi_k$ 称为未经过纯保费。一般地，一年中某时刻处的未经过纯保费等于该年的年缴纯保费与这一时刻到达下次缴费相距时间之积。

式(5.2.15)可解释为保单年度末的近似线性插值 $(1-s)\cdot{}_kV + {}_{k+1}V\cdot s$ 与未经过纯保费 $(1-s)\pi_k$ 之和。

[例 5.2.5] 保险金额为 10000 元的寿险保单，于男性被保险人 45 岁时签发，利用附录Ⅲ(CL1 非养老金业务男性表)的换算表数值，在年利率 $i=2.5\%$ 的情况下，试求下列寿险保单在第 20 个保单年度的期初纯保费准备金和期中纯保费准备金：

(1)普通终身寿险；

(2)60 岁缴清终身寿险。

解：(1)因

$$P_{45} = \frac{M_{45}}{N_{45}} = 0.0183413$$

$$A_{64} = \frac{M_{64}}{D_{64}} = 0.6379450$$

$$A_{65} = \frac{M_{65}}{D_{65}} = 0.6497799$$

$$\ddot{a}_{64} = \frac{N_{64}}{D_{64}} = 14.8444257$$

$$\ddot{a}_{65} = \frac{N_{65}}{D_{65}} = 14.3590410$$

故

$$ {}_{19}V_{45} = A_{64} - P_{45}\ddot{a}_{64} = 0.356763$$

$$ {}_{20}V_{45} = A_{65} - P_{45}\ddot{a}_{65} = 0.386416$$

故

$$ {}_{20}(IV)_{45} = {}_{19}V_{45} + P_{45} = 0.356763 + 0.0183413 = 0.3751046$$

故保险金额为 10000 元的普通终身寿险保单在第 20 个保单年度的期初纯保费准备金是

$$10000 \times 0.3751047 = 3751.047(\text{元})$$

$$ {}_{19+\frac{1}{2}}V_{45} = \frac{1}{2}({}_{19}V_{45} + P_{45} + {}_{20}V_{45}) = 0.380760$$

故保险金额为 10000 元的普通终身寿险保单在第 20 个保单年度的期中纯保费准备金是

$$10000 \times 0.380760 = 3807.60(\text{元})$$

(2)设 π 为 60 岁缴清终身寿险的均衡年缴纯保费，由于保费于 60 岁缴清(即于第 15 个保单年度初缴清)，故

$$ {}_{20}(IV)_{45} = {}_{19}V_{45} + \pi = A_{64} = 0.6379450$$

故该种保单在第 20 个保单年度的期初纯保费责任准备金是

$$10000 \times 0.6379450 = 6379.450(\text{元})$$

$$ {}_{19+\frac{1}{2}}V_{45} = \frac{1}{2}({}_{19}V_{45} + {}_{20}V_{45}) + \frac{1}{2}\pi $$

$$ = \frac{1}{2}(A_{64} + A_{65}) = 0.643862 $$

故该种保单在第 20 个保单年度的期中纯保费责任准备金是

$$ 10000 \times 0.643862 = 6438.62(\text{元}) $$

5.2.4 法克勒氏方法与递推公式

根据式(5.2.1)可知，期末责任准备金计算的一般公式是

$$ {}_kV = P \cdot \frac{N_x - N_{x+k}}{D_{x+k}} - \frac{M_x - M_{x+k}}{D_{x+k}} $$

现在，将上式作变形，即

$$ \begin{aligned} {}_kV &= P \cdot \frac{N_x - N_{x+k-1} + D_{x+k-1}}{D_{x+k}} - \frac{M_x - M_{x+k-1} + C_{x+k-1}}{D_{x+k}} \\ &= P \cdot \left(\frac{N_x - N_{x+k-1}}{D_{x+k-1}} + 1\right)\frac{D_{x+k-1}}{D_{x+k}} - \frac{M_x - M_{x+k-1}}{D_{x+k-1}} \cdot \frac{D_{x+k-1}}{D_{x+k}} - \frac{C_{x+k-1}}{D_{x+k}} \\ &= \left(P\frac{N_x - N_{x+k-1}}{D_{x+k-1}} - \frac{M_x - M_{x+k-1}}{D_{x+k-1}} + P\right) \cdot \frac{D_{x+k-1}}{D_{x+k}} - \frac{C_{x+k-1}}{D_{x+k}} \\ &= ({}_{k-1}V + P)\frac{D_{x+k-1}}{D_{x+k}} - \frac{C_{x+k-1}}{D_{x+k}} \end{aligned} \tag{5.2.16} $$

式(5.2.16)称为法克勒氏累积计算公式，此公式可以根据前一年的准备金推算下一年的准备金。利用累积计算公式来计算责任准备金的方法，称为法克勒氏方法。若考虑自签单日起连续计算各保单年度的期末责任准备金时，利用法克勒氏方法较为简便。

［例 5.2.6］ 设保险金额为 1000 元的 20 年限期缴费 30 年两全保险的保单，女性被保险人于 30 岁时签约。利用附录Ⅲ(CL2 非养老金业务女性表)的换算表数值，在年利率 $i = 2.5\%$ 的情况下，试求该保单在前 5 年的期末责任准备金。

解： 因

$$ {}_{20}P_{30:\overline{30}|} = \frac{A_{30:\overline{30}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{20}|}} = \frac{M_{30} - M_{60} + D_{60}}{N_{30} - N_{50}} $$

$$ = \frac{137126.7 - 125181.7 + 227484.2}{14754191 - 6851152} $$

$$ = 0.0302958 $$

故年缴均衡纯保费 $P = 30.2958$

$$ {}_1V = P \cdot \frac{D_{30}}{D_{31}} - 1000\frac{C_{30}}{D_{31}} $$

$$ = 30.2958 \times 1.025381 - 0.372138 $$

$$ = 30.6926 $$

$$ {}_2V = ({}_1V + P)\frac{D_{31}}{D_{32}} - 1000\frac{C_{31}}{D_{32}} = 62.160676 $$

$$ {}_3V = ({}_2V + P)\frac{D_{32}}{D_{33}} - 1000\frac{C_{32}}{D_{33}} = 94.400185 $$

$$ {}_4V = ({}_3V + P)\frac{D_{33}}{D_{34}} - 1000\frac{C_{33}}{D_{34}} = 127.436438 $$

$$_5V=(_4V+P)\frac{D_{34}}{D_{35}}-1000\frac{C_{34}}{D_{35}}=161.285566$$

利用未来法检验得

$$\begin{aligned}_5V&=1000A_{35:\overline{25|}}-P\ddot{a}_{35:\overline{15|}}\\&=\frac{1000(M_{35}-M_{60}+D_{60})-P(N_{35}-N_{50})}{D_{35}}\\&=\frac{238480900-167784290.4}{438357.8}=161.276186\end{aligned}$$

此题因小数四舍五入的关系，导致未来法与法克勒氏方法计算的结果不完全相同，两者相差 0.009380。以法克勒氏方法推算的各年度的期末责任准备金，其所计算的结果经过未来法检验是准确的。

下面，根据法克勒氏公式可以推出期初责任准备金、期末责任准备金及风险净额三者之间存在着一个极为有意义的关系式。

由法克勒氏公式，我们有

$$\begin{aligned}_kV&=(_{k-1}V+P)\frac{D_{x+k-1}}{D_{x+k}}-\frac{C_{x+k-1}}{D_{x+k}}\\&=(_{k-1}V+P)\frac{1+i}{p_{x+k-1}}-\frac{1}{p_{x+k-1}}+1\end{aligned}$$

因

$$_kV\cdot p_{x+k-1}=(_{k-1}V+P)(1+i)-q_{x+k-1}$$

或

$$_kV(1-q_{x+k-1})=(_{k-1}V+P)(1+i)-q_{x+k-1}$$

故

$$_kV=(_{k-1}V+P)(1+i)-(1-{_kV})q_{x+k-1}\tag{5.2.17}$$

其中，$(1-{_kV})q_{x+k-1}$称为第 k 个保单年度的净风险成本。一般地，第 k 个保单年度的死亡率与其纯风险金额的乘积，称为第 k 个保单年度风险净额的成本。式(5.2.17)表明：任何保单年度的期末准备金等于该年度期初准备金的积存值减去该年度风险净额的成本。

下面，推导出全离散式寿险险种中一常用的准备金递推公式。

由式(5.2.8)及式(5.2.9)，知

$$\begin{aligned}_kV&=\sum_{j=0}^{\infty}b_{k+j+1}v^{j+1}{}_{j|}q_{x+k}-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{k+j}v^j{}_jp_{x+k}\\&=(b_{k+1}vq_{x+k}-\pi_k)+vp_{x+k}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}b_{k+j+1}v^j{}_{j-1|}q_{x+k+1}-\sum_{j=1}^{\infty}\pi_{k+j}v^{j-1}{}_{j-1}p_{x+k+1}\right\}\\&=b_{k+1}q_{x+k}v-\pi_k+vp_{x+k}\cdot{}_{k+1}V\end{aligned}$$

故

$$b_{k+1}q_{x+k}v={_kV}+\pi_k-{_{k+1}V}\cdot p_{x+k}v$$

即

$$b_{k+1}q_{x+k}=({_kV}+\pi_k)(1+i)-{_{k+1}V}\cdot p_{x+k}\tag{5.2.18}$$

得到：

$$\pi_{k-1}=v(b_k-{_kV})q_{x+k-1}+(v\cdot{_kV}-{_{k-1}V})\tag{5.2.19}$$

上式表明：第 k 个保单年度所缴纳的纯保费 π_{k-1}，其中的一部分作为年末应支付的风险净额的成本，另一部分作为当年年度末的纯保费责任准备金$(v\cdot{_kV}-{_{k-1}V})$

[例 5.2.7]　设 20 年限期缴费的终身寿险保单，男性被保险人于 45 岁时签约，保险金额为 20000 元，利用附录Ⅲ(CL1 非养老金业务男性表)的换算表数值，在年利率

$i=2.5\%$的情况下，试求其第一个年度的期中准备金、期末准备金及风险净额的保险成本。

解：20 年限期终身寿险保单的均衡纯保费为

$$P=20000\cdot\frac{M_{45}}{N_{45}-N_{65}}=553.657(\text{元})$$

故
$$\begin{aligned}{}_1V&=({}_0V+P)\frac{D_{45}}{D_{46}}-20000\frac{C_{45}}{D_{46}}\\&=553.657\times1.02717034-42.34947701\\&=526.351(\text{元})\end{aligned}$$

$${}_{\frac{1}{2}}V=\frac{1}{2}[({}_0V+P)+{}_1V]=540.004(\text{元})$$

风险净额的成本是

$(b_1-{}_1V)q_{45}=(20000-526.351)\times2.113‰=41.148(\text{元})$

检验 $({}_0V+P)(1+i)=553.657\times(1+0.025)=567.498(\text{元})$

故 $({}_0V+P)(1+i)-(b_1-{}_1V)q_{45}=526.350(\text{元})$

由于四舍五入的关系，导致结果相差 0.001。

[例 5.2.8] 年龄为 x 岁者，购买一份延期 n 年的年金额为 1 个单位的期初付终身生存年金，且领取年金的人，于每年年初缴费一次，缴费期为 n 年；并规定：若领取年金的人在缴费期间内死亡，则在死亡者所处的保单年末支付的死亡给付金等于其保单的期末责任准备金。试求该种保险单的年缴纯保费以及在第 k 个保单年度的期末责任准备金 $(k\leqslant n)$。

解：设该保单在第 k 个保单年度的期末责任准备金为${}_kV$，死亡给付金为 $b_k(k=1, 2, \cdots, n)$。依题意，得

$$b_k={}_kV\quad(k=1,2,\cdots,n)$$
$${}_nV=\ddot{a}_{x+n}$$

记 π 为该保单的年缴纯保费，由式(5.2.19)可得

$$\pi=v\cdot{}_kV-{}_{k-1}V\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

或

$$v^{k-1}\pi=v^k\cdot{}_kV-v^{k-1}{}_{k-1}V\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

故
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}v^{k-1}\pi&=\sum_{k=1}^{n}(v^k{}_kV-{}_{k-1}V\cdot v^{k-1})\\&=v^n{}_nV-{}_0V=v^n\ddot{a}_{x+n}\end{aligned}$$

即
$$\ddot{a}_{\overline{n|}}\pi=v^n\ddot{a}_{x+n}$$

故
$$\pi=\frac{v^n\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{\overline{n|}}}=\frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}$$

由于
$$\sum_{k=1}^{h}v^{k-1}\pi=v^h{}_hV-{}_0V$$

故
$$\begin{aligned}{}_hV&=\frac{1}{v^h}\left(\sum_{k=1}^{h}v^{k-1}\pi+{}_0V\right)=\ddot{s}_{\overline{h|}}\pi\\&=\frac{\ddot{s}_{\overline{h|}}}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}\cdot\ddot{a}_{x+n}\qquad(h=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

[例 5.2.9]　某寿险保单规定：若被保险人在 n 年内死亡，则在死亡者所处保单年度末支付死亡保险金，保险金额等于该保单自签单日至该年度的期末责任准备金加 1 个单位，若第 n 年度末被保险人仍生存，则满期给付金额为 1 个单位。试建立签单时年龄为 x 岁的被保险人其年均衡纯保费公式及第 k 个保单年度的期末责任准备金。

解：设 ${}_kV$ 为第 k 个保单年度的期末责任准备金，死亡受益金为 $b_k(k=1, 2, \cdots, n)$。依题意，得

$$
{}_nV=1,\ {}_0V=0
$$

$$
b_k=1+{}_kV \qquad (k=1, 2, \cdots, n)
$$

记 π 为其年均衡纯保费，根据式(5.2.19)，得

$$
\pi=v\cdot{}_kV-{}_{k-1}V+vq_{x+k-1}, \qquad (k=1, 2, \cdots, n)
$$

或

$$
v^{k-1}\pi=v^k{}_kV-v^{k-1}{}_{k-1}V+v^kq_{x+k-1}, \ (k=1, 2, \cdots, n)
$$

上式两边对 k 求和，得

$$
\begin{aligned}
\pi\sum_{k=1}^{n}v^{k-1}&=\sum_{k=1}^{n}(v^k{}_kV-v^{k-1}{}_{k-1}V)+\sum_{k=1}^{n}v^kq_{x+k-1}\\
&=v^n\cdot{}_nV-{}_0V+\sum_{k=1}^{n}v^kq_{x+k-1}\\
&=v^n\cdot{}_nV+\sum_{k=1}^{n}v^kq_{x+k-1}
\end{aligned}
$$

故

$$
\pi=\frac{v^n+\sum_{k=1}^{h}v^kq_{x+k-1}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}
$$

同理可得

$$
\ddot{a}_{\overline{h}|}\pi=v^h\cdot{}_hV+\sum_{k=1}^{h}v^kq_{x+k-1} \qquad (h=1, 2, \cdots, n)
$$

故

$$
{}_hV=\ddot{s}_{\overline{h}|}\pi-\sum_{k=1}^{h}v^{k-h}q_{x+k-1} \qquad (h=1, 2, \cdots, n)
$$

一般地，假设全离散式寿险模型为：

(1)纯保费于每个保单年度初缴付一次，每次缴付纯保费为 $\pi_{j-1}(j=1, 2, \cdots)$。

(2)保险金于死亡发生的保单年度末给付，每个保单年度末的死亡给付额为 $b_j(j=1, 2, \cdots)$。

则由式(5.2.18)可得类似于式(4.2.17)的公式

$$
{}_kV=({}_{k-1}V+\pi_{k-1})(1+i)-(b_k-{}_kV)q_{x+k-1} \tag{5.2.20}
$$

从式(5.2.20)可以得到

$$
({}_{k-1}V+\pi_{k-1})=b_kvq_{x+k-1}-{}_kVvp_{x+k-1}
$$

或

$$
{}_kV=({}_{k-1}V+\pi_{k-1})\cdot\frac{1}{vp_{x+k-1}}-b_k\left(\frac{1-p_{x+k-1}}{p_{x+k-1}}\right)
$$

故

$$
{}_kV=({}_{k-1}V+\pi_{k-1})\frac{l_{x+k-1}}{vl_{x+k}}-b_k\frac{l_{x+k-1}-l_{x+k}}{l_{x+k}}
$$

$$=({}_{k-1}V+\pi_{k-1})\frac{v^{x+k-1}l_{x+k-1}}{v^{x+k}l_{x+k}}-b_k\frac{v^{x+k}d_{x+k-1}}{v^{x+k}l_{x+k}}$$

$$=({}_{k-1}V+\pi_{k-1})\frac{D_{x+k-1}}{D_{x+k}}-b_k\frac{C_{x+k-1}}{D_{x+k}} \quad (5.2.21)$$

式(5.2.21)为全离散式寿险责任准备金用换算函数式表示的递推公式。特别地，当 $\pi_{k-1}=P$（即年缴纯保费是均衡纯保费）、$b_k=1$（即保险金额为 1）时，可得法克勒氏计算公式。

5.2.5 趸缴纯保费的责任准备金

前面介绍的责任准备金，是年缴纯保费的责任准备金。本节以终身寿险为例介绍趸缴纯保费的责任准备金的计算。

假设年龄为 x 岁者，购买保险金额为 1 个单位的趸缴纯保费的终身寿险，保险金于被保险人死亡时所处的保单年度末支付。考虑其各保单年度的期末责任准备金。

$${}_1V_x=\frac{A_x(1+i)l_x-d_x}{l_{x+1}}=\frac{A_xv^xl_x-v^{x+1}d_x}{v^{x+1}l_{x+1}}$$

$$=A_x\frac{D_x}{D_{x+1}}-\frac{C_x}{D_{x+1}}=A_{x+1}$$

$${}_2V_x=\frac{{}_1V_x(1+i)l_{x+1}-d_{x+1}}{l_{x+2}}$$

$$={}_1V_x\frac{D_{x+1}}{D_{x+2}}-\frac{C_{x+1}}{D_{x+2}}=A_{x+1}\frac{D_{x+1}}{D_{x+2}}=A_{x+2}$$

$${}_3V_x=\frac{{}_2V_x(1+i)l_{x+2}-d_{x+2}}{l_{x+3}}$$

$$={}_2V_x\frac{D_{x+2}}{D_{x+3}}-\frac{C_{x+2}}{D_{x+3}}=A_{x+2}\frac{D_{x+2}}{D_{x+3}}-\frac{C_{x+2}}{D_{x+3}}=A_{x+3}$$

一般地，我们有

$${}_kV_x=A_{x+k}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots) \quad (5.2.22)$$

或

$${}_kV_x=\frac{M_{x+k}}{D_{x+k}}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots) \quad (5.2.23)$$

［例 5.2.10］ 考察年龄为 x 岁者，购买保险金额为 1 个单位的趸缴纯保费的 n 年两全保险，保险金于死亡发生的保单年度末或满期时支付，试导出该保单的期末责任准备金公式。

解：

$${}_1V_{x:\overline{n|}}=\frac{A_{x:\overline{n|}}(1+i)l_x-d_x}{l_{x+1}}$$

$$=A_{x:\overline{n|}}\frac{D_x}{D_{x+1}}-\frac{C_x}{D_{x+1}}$$

$${}_2V_{x:\overline{n|}}=\frac{{}_1V_{x:\overline{n|}}(1+i)l_{x+1}-d_{x+1}}{l_{x+2}}$$

$$={}_1V_{x:\overline{n|}}\frac{D_{x+1}}{D_{x+2}}-\frac{C_{x+1}}{D_{x+2}}$$

$$=\left(A_{x:\overline{n|}}\frac{D_x}{D_{x+1}}-\frac{C_x}{D_{x+1}}\right)\frac{D_{x+1}}{D_{x+2}}-\frac{C_{x+1}}{D_{x+2}}$$

$$= A_{x:\overline{n}|}\frac{D_x}{D_{x+2}} - \frac{C_x + C_{x+1}}{D_{x+2}}$$

$$_3V_{x:\overline{n}|} = \frac{_2V_{x:\overline{n}|}(1+i)l_{x+2} - d_{x+2}}{l_{x+3}}$$

$$= {_2V_{x:\overline{n}|}}\frac{D_{x+2}}{D_{x+3}} - \frac{C_{x+2}}{D_{x+3}}$$

$$= A_{x:\overline{n}|}\frac{D_x}{D_{x+3}} - \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2}}{D_{x+3}}$$

$$= A_{x:\overline{n}|}\frac{D_x}{D_{x+3}} - \frac{M_x - M_{x+3}}{D_{x+3}}$$

$$\vdots$$

$$_kV_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}\frac{D_x}{D_{x+k}} - \frac{M_x - M_{x+k}}{D_{x+k}} \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

或

$$_kV_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}\cdot\frac{D_x}{D_{x+k}} - \frac{M_x - M_{x+k}}{D_{x+k}}$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+k}} - \frac{M_x - M_{x+k}}{D_{x+k}}$$

$$= \frac{M_{x+k} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+k}}$$

$$= A_{x+k:\overline{n-k}|} \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{5.2.24}$$

5.2.6 其他常用的全离散式责任准备金的变形公式

对于全离散式的一般寿险模型，定义保险人在未来时刻 k 时的损失变量：

$$_kL = V^{J+1} - P_x\cdot\ddot{a}_{\overline{J+1}|}$$

定义

$$_kV = E(_kL) = E(V^{J+1}) - P_xE(\ddot{a}_{\overline{J+1}|})$$
$$= A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k}$$

对于两全保险，定义损失变量为：

$$_kL = \begin{cases} V^{J+1}\cdot\left[1 + \dfrac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\right] - \dfrac{P_{x:\overline{n}|}}{d}, & J < n-k \\ V^{n-k}\cdot\left[1 + \dfrac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\right] - \dfrac{P_{x:\overline{n}|}}{d}, & J \geqslant n-k \end{cases}$$

此节本书研究利用未来法计算离散式准备金的其他一些变形公式。

由表 5-2 中各险种年缴纯保费责任准备金未来法公式，我们可以导出全离散式寿险年缴纯保费责任准备金的另外三个公式。

第一种是年金比例公式，以终身寿险为例：

$$_kV_x = A_{x+k} - P_x\cdot\ddot{a}_{x+k}$$

$$= 1 - d\cdot\ddot{a}_{x+k} - \frac{1 - d\cdot\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}\cdot\ddot{a}_{x+k}$$

$$= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} \tag{5.2.25}$$

同理，对两全保险有：$${}_kV_{x:\overline{n}|}=1-\frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{5.2.26}$$

式(5.2.25)和式(5.2.26)称为年金比例公式，是利用投保人在 $x+k$ 岁时购买的生存年金与其在 x 岁时购买的生存年金的比值来求得第 k 个保单年度末的责任准备金。

[例 5.2.11]　已知${}_{10}V_{35}=0.150$，${}_{20}V_{35}=0.354$，计算${}_{10}V_{45}$。

解：
$${}_{10}V_{35}=1-\frac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{35}} \quad ①$$

$${}_{20}V_{35}=1-\frac{\ddot{a}_{55}}{\ddot{a}_{35}} \quad ②$$

$${}_{10}V_{45}=1-\frac{\ddot{a}_{55}}{\ddot{a}_{45}} \quad ③$$

由①得：$\frac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{35}}=1-0.150=0.850$　④

由②得：$\frac{\ddot{a}_{55}}{\ddot{a}_{35}}=1-0.354=0.646$　⑤

⑤÷④得：$\frac{\ddot{a}_{55}}{\ddot{a}_{45}}=0.646/0.850=0.76$ 代入③得：

$${}_{10}V_{45}=1-\frac{\ddot{a}_{55}}{\ddot{a}_{45}}=1-0.76=0.24$$

第二种是保费差公式

$$\begin{aligned}{}_kV_x &= A_{x+k}-P_x\cdot\ddot{a}_{x+k}\\ &= P_{x+k}\cdot\ddot{a}_{x+k}-P_x\cdot\ddot{a}_{x+k}\\ &= \ddot{a}_{x+k}\cdot(P_{x+k}-P_x)\end{aligned} \tag{5.2.27}$$

$${}_kV_{x:\overline{n}|}=\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}\cdot(P_{x+k:\overline{n-k}|}-P_{x:\overline{n}|}) \tag{5.2.28}$$

式(5.2.27)和式(5.2.28)称为保费差公式，是利用保险费的精算现值来表示纯保费责任准备金。这里，所谓“保费差”，是指被保险人自 $x+k$ 岁时起按剩余受益计算的年缴纯保费与原年缴纯保费之差。

第三种是减额缴清公式

$$\begin{aligned}{}_kV_x &= A_{x+k}-P_x\cdot\ddot{a}_{x+k}\\ &= A_{x+k}\left(1-P_x\cdot\frac{\ddot{a}_{x+k}}{A_{x+k}}\right)\\ &= A_{x+k}\left(1-\frac{P_x}{P_{x+k}}\right)\end{aligned} \tag{5.2.29}$$

$${}_kV_{x:\overline{n}|}=A_{x+k:\overline{n-k}|}\cdot\left(1-\frac{P_{x:\overline{n}|}}{P_{x+k:\overline{n-k}|}}\right) \tag{5.2.30}$$

式(5.2.29)和式(5.2.30)称为缴清保险公式。缴清保险公式的命名，来源于不丧失保单利益的减额缴清保险。减额缴清公式表明，若保险人到第 k 个保单年度末不能缴付当期保费，现金价值即此刻提取的准备金，可以用来购买 1 个趸缴保额为$\left(1-\frac{P_x}{P_{x+k}}\right)$的新保单。设 S 为减少的保额，则：$S\cdot A_{x+k}=P_x\cdot\ddot{a}_{x+k}$

$$S = \frac{P_x}{P_{x+k}}$$

在这种情况下，若将原保险转为减额缴清保险，一方面对保险公司是有利的，因为保险公司不必将资金抽回以应付对被保险人的支付，另外，退保人大多是身体状况好的人，对于保险公司来说给予这类客户多种选择以维持保单对其经营发展有利。另一方面，对保单持有人来说，不必承担退保费用，也避免了一定程度上的损失。

§5.3 全连续式寿险模型责任准备金

对于全连续式寿险模型纯保费准备金的计算，本节仍然是先以保险金额为1个单位的全连续式终身寿险保单为例（其中，签单时被保险人的年龄为 x 岁）。

5.3.1 终身寿险的责任准备金

记这种保单的年缴纯保费为 $\bar{P}(\bar{A}_x)$，相应地，在 t 年时（这里指保单年）的纯保费责任准备金以符号 ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ 表示。我们引入随机变量 U 表示年龄为 $x+t$ 岁者的未来寿命，则其概率密度函数为

$$ {}_u p_{x+t} \cdot \mu_{x+t+u} \qquad (\mu \geqslant 0)$$

从而在时刻 t 时保险人的未来损失是

$$ {}_tL = v^U - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{U|}} \tag{5.3.1}$$

则在时刻 t 时的纯保费准备金是

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) &= E({}_tL) = E(v^U) - P(\bar{A}_x)E(\bar{a}_{\overline{U|}}) \\ &= \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t} \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

特别地，当 $t=0$ 时，${}_0\bar{V}(\bar{A}_x)=0$，这时，${}_0\bar{V}(\bar{A}_x)=0$ 反映了平衡原理。即

$$\bar{A}_x - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_x = 0$$

或

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$$

事实上，随机变量 U 的概率密度分布，是随机变量 T 在条件 $T>t$ 的条件下，$T-t$ 的概率密度分布。随机变量 U 的分布函数是

$$1 - \frac{{}_{t+u}p_x}{{}_tp_x} = {}_uq_{x+t} \quad (u \geqslant 0)$$

从而随机变量 U 的概率密度函数是

$$\frac{{}_{t+u}p_x\,\mu_{x+t+u}}{{}_tp_x} = {}_up_{x+t}\,\mu_{x+t+u} \quad (u \geqslant 0)$$

根据式（5.3.1），则保险人在时刻 t 时的未来损失可写成

$$ {}_tL = v^U\left(1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right) - \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta} \tag{5.3.3}$$

未来损失$_tL$的方差是

$$Var[_tL] = Var\left[v^U\left(1+\frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right)-\frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right]$$
$$= \left(1+\frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right)^2 Var[v^U]$$
$$= \left(1+\frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right)^2 [{}^2\bar{A}_{x+t}-(\bar{A}_{x+t})^2] \qquad (5.3.4)$$

特别地，当$t=0$时，式（5.3.4）转化为

$$Var({}_0L) = \left(1+\frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right)^2 [{}^2\bar{A}_x-(\bar{A}_x)^2]$$

［例 5.3.1］ 设利力为δ，死力取常值μ，试求：${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$与$Var[_tL]$。

解：依题意，知$\bar{A}_x$，$\bar{a}_x$及$\bar{P}(\bar{A}_x)$与年龄x无关，且

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = {}_0\bar{V}(\bar{A}_x) = 0 \quad (t\geqslant 0)$$
$$\bar{a}_x = \int_0^{+\infty}\exp(-\delta t)\cdot\exp(-\mu t)dt = \frac{1}{\mu+\delta} \quad (t\geqslant 0)$$
$$\bar{A}_{x+t} = \bar{A}_x = \int_0^{+\infty}\exp(-\delta t)\cdot\mu\exp(-\mu t)dt = \frac{\mu}{\mu+\delta} \quad (t\geqslant 0)$$
$${}^2\bar{A}_{x+t} = {}^2\bar{A}_x = \int_0^{+\infty}\exp(-2\delta t)\cdot\mu\exp(-\mu t)dt = \frac{\mu}{\mu+2\delta} \quad (t\geqslant 0)$$

故 $$Var(_tL) = Var({}_0L) = \left(1+\frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right)^2[{}^2\bar{A}_{x+t}-(\bar{A}_{x+t})^2]$$
$$= \left(1+\frac{\mu}{\delta}\right)^2\left[\frac{\mu}{\mu+2\delta}-\left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\right)^2\right] = \frac{\mu}{\mu+2\delta}$$

读者可以考察：当死力取常值时

$$Var(_tL) = {}^2\bar{A}_{x+t}$$

是否成立？

［例 5.3.2］ 设年利率$i=6\%$，$l_x=100-x$，$0\leqslant x\leqslant 100$，试求：

（1）${}_t\bar{V}(\bar{A}_{35})$（$t=0$，10，20，…60）。

（2）$Var(_tL)$（$t=0$，10，20，…60）。

解：（1）由${}_tp_x=\frac{l_{x+t}}{l_x}$及$l_x=100-x$，得

$${}_tp_{35} = \frac{l_{35+t}}{l_{35}} = 1-\frac{t}{65} \quad (0\leqslant t<65)$$

又因 $${}_tp_x\,\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt}({}_tp_x)$$

故 $${}_tp_{35}\,\mu_{35+t} = -\frac{d}{dt}({}_tp_{35}) = -\frac{d}{dt}\left(1-\frac{t}{65}\right) = \frac{1}{65} \quad (0\leqslant t<65)$$

故 $$\bar{A}_{35} = \int_0^{+\infty} v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt$$
$$= \int_0^{65} v^t\frac{1}{65}dt = \frac{1}{65\ln v}v^t\Big|_0^{65}$$
$$= \frac{1}{65\ln(1.06)}\left[1-\frac{1}{(1.06)^{65}}\right]$$

$$= 0.25804694$$

故 $$\bar{a}_{35} = \frac{1-\bar{A}_{35}}{\delta} = \frac{1-0.25804694}{\ln(1.06)}$$

$$= 12.73325833$$

$$\bar{P}(\bar{A}_{35}) = \frac{\bar{A}_{35}}{\bar{a}_{35}} = \frac{0.25804694}{12.73325833}$$

$$= 0.02026559$$

同理可得

$$\bar{A}_{35+t} = \int_0^{65-t} v^s \frac{1}{65-t} ds = \frac{1}{(65-t)\ln v} v^s \Big|_0^{65-t}$$

$$= \frac{1}{65-t} \cdot \frac{1-v^{65-t}}{\delta} = \frac{1}{65-t} \cdot \bar{a}_{\overline{65-t}|} \quad (0 \leqslant t < 65)$$

故 $$\bar{a}_{35+t} = \frac{1-\bar{A}_{35+t}}{\delta} = \frac{1-\bar{A}_{35+t}}{\ln(1.06)} = \frac{1}{\delta}\left(1 - \frac{1}{65-t} \cdot \bar{a}_{\overline{65-t}|}\right)$$

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_{35}) = \bar{A}_{35+t} - \bar{P}(\bar{A}_{35})\bar{a}_{35+t}$$

$$= \frac{1.347794}{65-t} \cdot \bar{a}_{\overline{65-t}|} - 0.347794$$

(2) $${}^2\bar{A}_{x+t} = \int_0^{65-t} v^{2s} \frac{1}{65-t} ds$$

$$= \frac{1}{65-t} \cdot {}^2\bar{a}_{\overline{65-t}|}$$

故 $$Var({}_tL) = \left(1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right)^2 [{}^2\bar{A}_{x+t} - (\bar{A}_{x+t})^2]$$

$$= \frac{1.81654929}{65-t}\left[{}^2\bar{a}_{\overline{65-t}|} - \frac{(\bar{a}_{\overline{65-t}|})^2}{65-t}\right]$$

利用上述 ${}_t\bar{V}$（$\bar{A}_{35}$）及 Var（${}_tL$）的表达式，我们可以得到所要求的结果如下。

t	${}_t\bar{V}$（$\bar{A}_{35}$）	Var（${}_tL$）
0	0.0000	0.1187
10	0.0557	0.1201
20	0.1289	0.1172
30	0.2271	0.1073
40	0.3619	0.0861
50	0.5508	0.0508
60	0.8214	0.0097

[例 5.3.3]　设 L 为 25 岁的人购买完全连续型终身寿险时保险人的损失随机变量，且 $Var[L]=0.20$，$\bar{A}_{45}=0.7$，${}^2\bar{A}_{25}=0.3$，计算 ${}_{20}\bar{V}$（$\bar{A}_{25}$）。

解：由于

$$Var[L] = \frac{{}^2\bar{A}_{25} - \bar{A}_{25}^2}{(1-\bar{A}_{25})^2} = 0.20, {}^2\bar{A}_{25} = 0.3$$

所以

$$A_{25} = 0.5$$

$$ {}_{20}\bar V(\bar A_{25}) = \frac{\bar A_{45} - \bar A_{25}}{1 - \bar A_{25}} = \frac{0.7 - 0.5}{1 - 0.5} = 0.4 $$

5.3.2 其他常用的全连续式准备金的变形公式

对于全连续式的一般寿险模型，我们定义保险人未来损失为

$$ {}_tL = b_{t+u} \cdot v^u - \int_0^u v^s \pi_{t+s} ds $$

这里，b_{t+u}表示在 $t+u$ 时刻发生死亡时支付的保险金额，π_{t+s}表示在 $t+s$ 时刻缴纳的纯保费年缴付率。对于这种一般寿险，其纯保费准备金用符号${}_t\bar V$ 表示，则

$$ {}_t\bar V = E({}_tL) = \int_0^{+\infty}\left[b_{t+u}v^u - \int_0^u v^s\pi_{t+s}ds \right]{}_up_{x+t}\,\mu_{x+t+u}du $$

$$ = \int_0^{+\infty} b_{t+u}v^u\,{}_up_{x+t}\mu_{x+t+u}du - \int_0^{+\infty} v^s\pi_{t+s}\cdot {}_sp_{x+t}ds \qquad (5.3.5) $$

上式中最后一个积分是用分部积分法及 $\lim\limits_{s\to\infty} {}_sp_{x+t} = 0$ 得到的。式（5.3.5）表明，其责任准备金的计算实质是未来法，因此，式（5.3.5）也称为全连续式寿险年缴纯保费责任准备金的未来法公式。

表 5－3 是全连续式一些常见险种年缴纯保费责任准备金的计算公式及其相应的符号。

表 5－3　　　　责任准备金的未来法公式

险　　别	符　　号	未来法计算公式
终身寿险	${}_t\bar V(\bar A_x)$	$\bar A_{x+t} - \bar P(\bar A_x)\,\bar a_{x+t}$
n 年定期寿险	${}_t\bar V(\bar A^1_{x:\overline{n}\rvert})$	$\bar A^1_{x+t:\overline{n-t}\rvert} - \bar P(\bar A^1_{x:\overline{n}\rvert})\,\bar a_{x+t:\overline{n-t}\rvert}$　　$t<n$ 0　　$t=n$
n 年两全保险	${}_t\bar V(\bar A_{x:\overline{n}\rvert})$	$\bar A_{x+t:\overline{n-t}\rvert} - \bar P(\bar A_{x:\overline{n}\rvert})\,\bar a_{x+t:\overline{n-t}\rvert}$　　$t<n$ 1　　$t=n$
缴费期为 h 年的终身寿险	${}^h_t\bar V(\bar A)$	$\bar A_{x+t} - {}_h\bar P(\bar A_x)\,\bar a_{x+t:\overline{h-t}\rvert}$　　$t<h$ $\bar A_{x+t}$　　$t\geqslant h$
缴费期为 h 年的 n 年两全保险	${}^h_t\bar V(\bar A_{x:\overline{n}\rvert})$	$\bar A_{x+t:\overline{n-t}\rvert} - {}_h\bar P(\bar A_{x:\overline{n}\rvert})\,\bar a_{x+t:\overline{h-t}\rvert}$　　$t<h$ $\bar A_{x+t:\overline{n-t}\rvert}$　　$h\leqslant t<n$ 1　　$t=n$
n 年生存保险	${}_t\bar V(A_{x:\overline{n}\rvert}^{\ \ 1})$	$\bar A_{x+t:\overline{n-t}\rvert}^{\ \ \ 1} - \bar P(A_{x:\overline{n}\rvert}^{\ \ 1})\,\bar a_{x+t:\overline{n-t}\rvert}$　　$t<n$ 1　　$t=n$
n 年延期的终身生存年金	${}_t\bar V({}_{n\rvert}\bar a_x)$	$\bar a_{x+n} - \bar P({}_{n\rvert}\bar a_x)\,\bar a_{x+t:\overline{n-t}\rvert}$　　$t<n$ $\bar a_{x+t}$　　$t\geqslant n$

由表 5－3 中各险种年缴纯保费责任准备金未来法公式，我们可以导出全连续式寿险年缴纯保费责任准备金的另外三个公式。这里，以 n 年普通两全保险为例，来说明其年

缴纯保费责任准备金的其他三种公式。

第一种公式是保费差公式。

由表 5-3 知：n 年普通两全保险年缴纯保费责任准备金是

$$_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

对上式作如下变形，可得

$$\begin{aligned} _t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \left[\frac{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\right]\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ &= [\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}) - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})]\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

式（5.3.6）称为保费差公式，在 5.2.6 节已作描述，这里不再赘述。

第二种公式是缴清保险公式。仍以 n 年期普通两全保险为例，对其未来法公式作变形，可得

$$\begin{aligned} _t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \left[1 - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\frac{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}}\right]\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ &= \left[1 - \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})}{\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|})}\right]\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

式（5.3.7）称为缴清保险公式，相关概念在 5.2.6 中有所描述。

第三种公式是过去法公式。仍以 n 年期普通两全保险为例，其责任准备金的未来法公式是

$$_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

当 $s<n-t$ 时，则

$$\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \bar{a}_{x+t:\overline{s}|} = {}_sE_{x+t}\bar{a}_{x+t+s:\overline{n-t-s}|}$$

即

$$\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = \bar{a}_{x+t:\overline{s}|} + {}_sE_{x+t}\bar{a}_{x+t+s:\overline{n-t-s}|}$$

我们还有

$$\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} = \bar{A}^{1}_{x+t:\overline{s}|} + {}_sE_{x+t}\bar{A}_{x+t+s:\overline{n-t-s}|}$$

故
$$\begin{aligned} _t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \bar{A}^{1}_{x+t:\overline{s}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+t:\overline{s}|} \\ &\quad + {}_sE_{x+t}[\bar{A}_{x+t+s:\overline{n-t-s}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+t+s:\overline{n-t-s}|}] \\ &= \bar{A}^{1}_{x+t:\overline{s}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+t:\overline{s}|} + {}_sE_{x+t}[{}_{t+s}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})] \end{aligned}$$

令 $t=0$，则$_0\bar{V}$（$\bar{A}_{x:\overline{n}|}$）$=0$，从而，有

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{s}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x:\overline{s}|} + {}_sE_x \cdot {}_s\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = 0$$

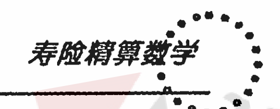
或

$$\begin{aligned} _s\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \frac{1}{_sE_x}[\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x:\overline{s}|} - \bar{A}^{1}_{x:\overline{s}|}] \\ &= \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{S}_{x:\overline{s}|} - {}_s\bar{k}_x \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

其中，$\bar{S}_{x:\overline{s}|} = \bar{a}_{x:\overline{s}|}/{}_sE_x$。

$$_s\bar{k}_x = \frac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{s}|}}{_sE_x} = \int_0^s \frac{v^t{}_tp_x\mu_{x+t}}{v^s{}_sp_x}dt = \int_0^s \frac{(1+i)^{s-t}l_{x+t}\mu_{x+t}}{l_{x+s}}dt$$

式（5.3.8）称为过去法公式。其中，$_s\bar{k}_x$称为保险成本的积累。用术语来说，$_s\bar{k}_x$表示年龄为 x 岁者，购买 s 年的保险金额为 1 个单位的定期寿险，在 s 年时刻处的趸缴纯保费。



对于全连续式终身寿险责任准备金的几种特殊公式，n 年两全保寿险责任准备金也有类似的公式成立。但是，一般寿险责任准备金不一定有这些类似公式。例如，终身寿险责任准备金的三个特殊的公式是

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = 1 - \frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x} \tag{5.3.9}$$

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x+t}) - \bar{P}(\bar{A}_x)}{\bar{P}(\bar{A}_{x+t}) + \delta} \tag{5.3.10}$$

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_{x+t} - \bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x} \tag{5.3.11}$$

下面，我们对公式（5.3.9）、（5.3.10）及（5.3.11）分别给予推导。

证明：

$$\begin{aligned}
{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) &= \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t} \\
&= (1 - \delta\bar{a}_{x+t}) - \left[\frac{1}{\bar{a}_x} - \delta\right]\bar{a}_{x+t} \\
&= 1 - \frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) &= \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t} \\
&= \left[\frac{\bar{A}_{x+t}}{\bar{a}_{x+t}} - \bar{P}(\bar{A}_x)\right]\bar{a}_{x+t} \\
&= [\bar{P}(\bar{A}_{x+t}) - \bar{P}(\bar{A}_x)]\bar{a}_{x+t} \\
&= \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x+t}) - \bar{P}(\bar{A}_x)}{\bar{P}(\bar{A}_{x+t}) + \delta}
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) &= \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t} \\
&= \bar{A}_{x+t} - \bar{A}_x\frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x} \\
&= \bar{A}_{x+t} - \bar{A}_x[1 - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)] \\
&= \bar{A}_{x+t} - \bar{A}_x + \bar{A}_x \cdot {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)
\end{aligned}$$

对 ${}_t\bar{V}$（$\bar{A}_x$）求解，可得

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_{x+t} - \bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x}$$

［例 5.3.4］　已知 $1000\,{}_t\bar{V}$（$\bar{A}_x$）$=100$；$1000\bar{P}$（$\bar{A}_x$）$=10.50$；$\delta=0.003$ 计算 $\bar{a}_{x+t}$

解：由于

$$\begin{aligned}
{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) &= \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t} \\
&= (1 - \delta\bar{a}_{x+t}) - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t} \\
&= 1 - (\delta + \bar{P}(\bar{A}_x))\bar{a}_{x+t}
\end{aligned}$$

故

$$\bar{a}_{x+t} = \frac{1 - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)}{\delta + \bar{P}(\bar{A}_x)} = \frac{1 - 0.100}{0.03 + 0.0105} = 22.22$$

5.3.3　责任准备金的微分方程式

对于全离散式寿险，我们介绍了责任准备金的递推公式。那么，对于全连续式寿险，

我们将讨论其纯保费责任准备金的微分方程式。

假设年龄为 x 岁者，签约全连续式寿险保单，并规定：若被保险人在保险期间的时刻 t 时死亡，给付金额为 b_t；而在时刻 t 时年纯保费缴付率为 π_t（$t \geqslant 0$），则在 $[t,\ t+dt]$ 时间内缴费率是 $\pi_t b_t$，从而在时刻 t 时的责任准备金 ${}_t\bar{V}$ 可表示为

$$ {}_t\bar{V} = \int_0^{\infty} b_{t+s} v^s {}_sp_{x+t}\mu_{x+t+s} ds - \int_0^{\infty} \pi_{t+s} v^s {}_sp_{x+t} ds \tag{5.3.12} $$

令 $u = t + s$，则式（4.3.12）转化为

$$ {}_t\bar{V} = \int_t^{\infty} (b_u\mu_{x+u} - \pi_u)\exp[\delta(t-u)]\,{}_{u-t}p_{x+t}du $$

上式两边对 t 求导，得

$$ \frac{d}{dt}({}_t\bar{V}) = -(b_t\mu_{x+t} - \pi_t) + (\delta + \mu_{x+t}) \cdot {}_t\bar{V} $$

或

$$ \frac{d}{dt}({}_t\bar{V}) = \pi_t + (\delta + \mu_{x+t})\bar{V} - b_t\mu_{x+t} \tag{5.3.13} $$

式（5.3.13）表明，准备金的变化率由三部分构成：保费率 π_t，在利力为 δ 与死力为 μ_t 下准备金的增长率（$\delta + \mu_{x+t}$）${}_t\bar{V}$ 和给付金额的支付率 $b_t\mu_{x+t}$ 等。

式（5.3.13）移项可得到

$$ \pi_t + {}_t\bar{V}\delta = (b_t - {}_t\bar{V})\mu_{x+t} + \frac{d\,{}_t\bar{V}}{dt} \tag{5.3.14} $$

其中，$(b_t - {}_t\bar{V})\ \mu_{x+t}$ 称为基于风险净额的支付率。

式（5.3.14）表明：在时刻 t 时的纯保费缴付率和责任准备金利息率，与风险净额支付率与责任准备金的增长率保持平衡。

§5.4　半连续式寿险模型责任准备金

5.4.1　责任准备金的未来法公式

半连续式寿险模型，其常见险别的年缴纯保费，分别以符号 $P(\bar{A}_x)$、$P(\bar{A}^1_{x:\overline{n|}})$、$P(\bar{A}_{x:\overline{n|}})$、${}_hP(\bar{A}_x)$ 及 ${}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n|}})$ 表示（在第三章第四节中已作介绍）。对于半连续式寿险模型的纯保费责任准备金，其计算原理与全离散式寿险模型完全相同，公式也与全离散式模型相应险别的公式类似。具体地说就是，半连续式寿险模型的纯保费准备金的计算，只需在全离散式寿险准备金的计算公式中，以 $\bar{A}$ 代替 A，用 $P(\bar{A})$ 取代 P 即可。半连续式寿险准备金的计算公式，见表 5-4。

表 5-4　　责任准备金的未来法公式

险别	符号	未来法计算公式
终身寿险	${}_kV(\bar{A}_x)$	$\bar{A}_{x+k}-P(\bar{A}_x)\ddot{a}_{x+k}$
n 年定期寿险	${}_kV(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\vert})$	$\bar{A}^1_{x+k:\overline{n-k}\vert}-P(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\vert})\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\vert}$　$k<n$ 0　$k=n$
n 年两全保险	${}_kV(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert})$	$\bar{A}_{x+k:\overline{n-k}\vert}-P(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert})\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\vert}$　$k<n$ 1　$k=n$
缴费期为 h 年的终身寿险	${}^h_kV(\bar{A}_x)$	$\bar{A}_{x+k}-{}_hP(\bar{A}_x)\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\vert}$　$k<h$ $\bar{A}_{x+k}$　$k\geqslant h$
缴费期为 h 年的 n 年两全保险	${}^h_kV(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert})$	$\bar{A}_{x+k:\overline{n-k}\vert}-{}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert})\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\vert}$　$k<h$ $\bar{A}_{x+k:\overline{n-k}\vert}$　$h\leqslant k<n$ 1　$k=n$
n 年生存保险	${}_kV(A_{x:\overline{n}\vert}^{\ \ 1})$	$A_{x+k:\overline{n-k}\vert}^{\ \ \ \ 1}-P(A_{x:\overline{n}\vert}^{\ \ 1})\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\vert}$　$k<n$ 1　$k=n$
n 年延期的终身生存年金	${}_kV({}_{n\vert}\bar{a}_x)$	$\bar{a}_{x+n}-P(A_{x:\overline{n}\vert}^{\ \ 1})\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\vert}$　$k<n$ $\bar{a}_{x+k}$　$k\geqslant n$

5.4.2 责任准备金的换算函数式

根据全连续式寿险趸缴纯保费的换算函数式和生存年金精算现值的换算函数式，以及半连续式寿险年缴纯保费公式，相应地，可以得到半连续式寿险年缴纯保费责任准备金的换算函数式。仍以 h 年限期缴费 n 年两全保险为例，由未来法，有

$$
{}^h_kV(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert})=\begin{cases}\bar{A}_{x+k:\overline{n-k}\vert}-{}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert})\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\vert} & (k<h)\\ \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}\vert} & (h\leqslant k<n)\\ 1 & (k=n)\end{cases}
$$

根据换算函数有

$$
\bar{A}_{x+k:\overline{n-k}\vert}=\frac{\bar{M}_{x+k}-\bar{M}_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+k}}
$$

$$
\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\vert}=\frac{N_{x+k}-N_{x+h}}{D_{x+k}}
$$

故 ${}^h_kV(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert})$ 的换算函数公式是

$$
{}^h_kV(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert})=\begin{cases}\dfrac{\bar{M}_{x+k}-\bar{M}_{x+n}+D_{x+n}-(N_{x+k}-N_{x+h})\,{}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert})}{D_{x+k}} & (k<h)\\[2ex] \dfrac{\bar{M}_{x+k}-\bar{M}_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+k}} & (h\leqslant k<n)\end{cases}
$$

同理可得其他常用险种的准备金换算函数公式，省略 $n=k$ 的情况，总结如表 5-5。

表 5-5 责任准备金的换算函数式（分母均为 D_{x+k}）

险种	符号	未来法	过去法
终身寿险	${}_kV(\bar{A}_x)$	$\bar{M}_{x+k}-P(\bar{A}_x)\cdot N_{x+k}$	$P(\bar{A}_x)\cdot(N_x-N_{x+k})-(\bar{M}_x-\bar{M}_{x+k})$
n 年定期寿险	${}_kV(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil})$	$\bar{M}_{x+k}-\bar{M}_{x+n}-P(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil})\cdot(N_{x+k}-N_{x+n})$	$P(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil})\cdot(N_x-N_{x+k})-(\bar{M}_x-\bar{M}_{x+k})$
n 年两全保险	${}_kV(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil})$	$\bar{M}_{x+k}-\bar{M}_{x+n}+D_{x+n}-P(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})\cdot(N_{x+k}-N_{x+n})$	$P(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})\cdot(N_x-N_{x+k})-(\bar{M}_x-\bar{M}_{x+k})$
缴费期为 h 年的终身寿险	${}^h_kV(\bar{A}_x)$	$\bar{M}_{x+k}-{}_hP(\bar{A}_x)(N_{x+k}-N_{x+h})$，$k<h$ $\bar{M}_{x+k}$，$k\geqslant h$	${}_hP(\bar{A}_x)\cdot(N_x-N_{x+k})-(\bar{M}_x-\bar{M}_{x+k})$，$k<h$ $k<h$ 时仍须用未来法计算
缴费期为 h 年的 n 年两全保险	${}^h_kV(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})$	$\bar{M}_{x+k}-\bar{M}_{x+n}+D_{x+n}-{}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})\cdot(N_{x+k}-N_{x+h})$，$k<h$ $\bar{M}_{x+k}-\bar{M}_{x+n}+D_{x+n}$，$h\leqslant k<n$	${}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})\cdot(N_x-N_{x+k})-(\bar{M}_x-\bar{M}_{x+k})$，$k<h$ $h\leqslant k<n$ 时仍须用未来法计算
n 年生存保险	${}_kV(A_{x:\overline{n}\rceil}^{\ \ 1})$	$D_{x+n}-P_{x:\overline{n}\rceil}^{\ \ 1}(N_{x+k}-N_{x+n})$	$P_{x:\overline{n}\rceil}^{\ \ 1}(N_{x+k}-N_{x+n})$

以上结果读者可以自行验证。

[例 5.4.1] 年龄为 45 岁男性购买一份半连续式递减的 20 年定期寿险，保险利益如下：若被保险人在第一个保单年度内死亡，则给付金额为 100000 元，以后每年递减 5000 元，直至期满为止。试利用附录Ⅲ（CL1—非养老金业务男性表）及年利率 $i=2.5\%$ 下的换算表数值，并在 UDD 假设条件下，计算：(1) 年缴纯保费和第一、二、三保单年度的期末准备金；(2) 15 年期限缴费的年缴纯保费和第一、二、三保单年度的期末准备金。

解：(1) 设年缴纯保费为 P，则

$$P=\frac{100000\bar{M}_{45}-5000(\bar{R}_{46}-\bar{R}_{66})}{N_{45}-N_{65}}$$

在 UDD 假设条件下，则年缴纯保费 P 是

$$\begin{aligned}P&=5000\cdot\frac{i}{\delta}\cdot\frac{20M_{45}-R_{46}+R_{66}}{N_{45}-N_{65}}\\&=5000(1.01244850)\cdot\frac{2872698-2668473.2}{7831243-2642658}\\&=199.25(\text{元})\end{aligned}$$

应用法克勒氏累积计算公式，则第一保单年度的期末准备金是（在 UDD 假设条件下）

$$\begin{aligned}&199.25\frac{D_{45}}{D_{46}}-100000\frac{\bar{C}_{45}}{D_{46}}\\&=199.25\frac{334640.9}{325789.1}-100000(1.01244850)\frac{689.8499}{325789.1}\\&=204.67-214.38=-9.71(\text{元})\end{aligned}$$

在第二保单年度的期末准备金是

$$(-9.71+199.25)\frac{D_{46}}{D_{47}}-95000\frac{\bar{C}_{46}}{D_{47}}$$

$$=189.54\frac{325789.1}{317126.2}-95000(1.01244850)\frac{716.7359}{317126.2}$$

$$=194.72-217.38=-22.66(\text{元})$$

在第三保单年度的期末准备金是

$$(-22.66+199.25)\frac{D_{47}}{D_{48}}-90000\frac{\bar{C}_{47}}{D_{48}}$$

$$=176.59\frac{317126.2}{308644.9}-90000(1.01244850)\frac{746.5615}{308644.9}$$

$$=181.443-220.405=-38.962(\text{元})$$

(2) 15 年限期年缴费的年缴纯保费是

$$5000\frac{20\bar{M}_{45}-\bar{R}_{46}+\bar{R}_{66}}{N_{45}-N_{60}}$$

$$=5000\cdot\frac{i}{\delta}\cdot\frac{20M_{45}-R_{46}+R_{66}}{N_{45}-N_{60}}$$

$$=5000(1.01244850)\cdot\frac{2872698-2668473.2}{7831243-3665593}$$

$$=248.18(\text{元})$$

应用法克勒氏累积公式，类似可得到第一、二、三保单年度的期末准备金分别是 40.54 元、79.23 元和 115.99 元。

5.4.3 在 UDD 假设条件下的责任准备金公式

以 h 年限期缴费 n 年两全保险责任准备金未来法公式为例，有

$$ {}_k^hV(\bar{A}_{x:\overline{n}|})=\begin{cases}\bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|}-{}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\,\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} & (k<h)\\ \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|} & (h\leqslant k<n)\end{cases}$$

在 UDD 假设条件下，有

$$\bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|}=\frac{i}{\delta}\bar{A}^{\;1}_{x+k:\overline{n-k}|}+A_{x+k:\overline{n-k}|}^{\;\;\;\;\;\;1}$$

$${}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}|})=\frac{i}{\delta}\cdot{}_hP(A^1_{x:\overline{n}|})+{}_hP(A_{x:\overline{n}|}^{\;\;\;1})$$

其中 ${}_hP(A_{x:\overline{n}|}^{\;\;\;1})$ 为 h 年限期缴费 n 年生存保险的年缴纯保费。

根据全离散式寿险准备金未来法公式，可得

$${}_k^hV(\bar{A}_{x:\overline{n}|})={}_k^hV(A_{x:\overline{n}|}^{\;\;\;1})+\frac{i}{\delta}\cdot{}_k^hV^1_{x:\overline{n}|}\tag{5.4.1}$$

同理可得

$${}_kV(\bar{A}_x)=\frac{i}{\delta}\cdot{}_kV_x\tag{5.4.2}$$

$${}_kV(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})=\frac{i}{\delta}\cdot{}_kV^1_{x:\overline{n}|}\tag{5.4.3}$$

$${}_k^hV(\bar{A}_x)=\frac{i}{\delta}\cdot{}_k^hV_x\tag{5.4.4}$$

$${}_kV(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{i}{\delta} \cdot {}_kV^1_{x:\overline{n}|} + {}_kV_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \tag{5.4.5}$$

由例5.4.1及公式（5.4.1）至公式（5.4.5）可知：在死亡均匀分布的条件下，半连续式寿险年缴纯保费责任准备金，通过相应的全离散式寿险责任准备金公式，很容易计算。

§5.5　每年分 m 次缴费的责任准备金

前面我们介绍了每年分 m 次缴费的寿险模型年缴纯保费的计算。本节将分两种情形讨论每年分 m 次缴费的寿险责任准备金，即全离散式与半连续式下的责任准备金。

5.5.1　在全离散式下寿险的责任准备金

每年分 m 次缴费的寿险模型，其准备金的计算原理与全离散式寿险模型责任准备金的计算原理完全相同。以 h 年限期缴费 n 年两全保险为例，根据未来法，当 $k<h$ 时，则其准备金 ${}^h_kV^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ 可表示为

$${}^h_kV^{(m)}_{x:\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|} \quad (k<h)$$

则有

$${}^h_kV^{(m)}_{x:\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - \frac{\ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}|}}A_{x:\overline{n}|} \quad (k<h)$$

在 *UDD* 假设条件下，我们有

$${}^h_kV^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_{x+k}-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+k}} - \frac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+k}} \cdot \frac{N^{(m)}_{x+k}-N^{(m)}_{x+h}}{N^{(m)}_x-N^{(m)}_{x+h}} \quad (k<h)$$

同理可得

$${}^h_kV^{(m)}_x = A_{x+k} - P^{(m)}_x\ddot{a}^{(m)}_{x+k}$$

下面我们考察两全保险中的 ${}^h_kV^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ 与 ${}^h_kV_{x:\overline{n}|}$ 之间的差异。

当 $k<h$ 时，我们有

$$\begin{aligned}{}^h_kV^{(m)}_{x:\overline{n}|} - {}^h_kV_{x:\overline{n}|} &= {}_hP_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} - {}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|} \\ &= {}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|}\left[\frac{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} - a^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|}\right]\end{aligned}$$

在 *UDD* 假设条件下，上式变形为：

$$\begin{aligned}{}^h_kV^{(m)}_{x:\overline{n}|} - {}^h_kV_{x:\overline{n}|} &= -\beta(m)\,{}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|}[A^{\ 1}_{x+k:\overline{h-k}|} - P^1_{x:\overline{h}|} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}] \\ &= -\beta(m)\,{}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|} \cdot {}_kV^1_{x:\overline{h}|}\end{aligned}$$

$${}^h_kV^{(m)}_{x:\overline{n}|} = {}^h_kV_{x:\overline{n}|} - \beta(m) \cdot {}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|} \cdot {}_kV^1_{x:\overline{h}|} \tag{5.5.1}$$

式（5.5.1）表明：在死亡均匀分布的条件下，每年分 m 次缴费的责任准备金等于全离散式相应的寿险责任准备金，加上全离散式定期寿险（期限为缴费 h 年的）责任准备金的一部分［比例是（$-\beta(m) \cdot {}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|}$）］。

［例 5.5.1］ 设某男性死亡服从附录Ⅲ（CL1—非养老金业务男性表），年利率为 2.5%，并且假设在每一年龄内的死亡服从均匀分布。已知 $1000\ {}_5V_{35}=44.71$，$\ddot{a}_{35}^{(2)}=17.1571$，试计算 $1000\ ({}_5V_{35}^{(2)}-{}_5V_{35})$。

解：利用式（5.5.1）可得

$$ {}_5V_{35}^{(2)}-{}_5V_{35}=-\beta(2)P_{35}^{(2)}\ {}_5V_{35} $$

及

$$ \beta(2)=\frac{i^{(2)}-i}{i^{(2)}d^{(2)}}=-0.253119 $$

$$ A_{35}=\frac{M_{35}}{D_{35}}=0.34296559 $$

$$ P_{35}^{(2)}=\frac{A_{35}}{\ddot{a}_{35}^{(2)}}=\frac{0.34296559}{17.1571}=0.0199897 $$

从而可得

$$ 1000({}_5V_{35}^{(2)}-{}_5V_{35})=-1000\beta(2)P_{35}^{(2)}\ {}_5V_{35}=0.226222 $$

5.5.2 在半连续式下寿险的责任准备金

每年分 m 次缴费的半连续式寿险模型，其责任准备金的计算，仍以 h 年限期缴费 n 年两全保险为例。根据未来法，当 $k<h$ 时，其准备金 ${}_k^hV^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ 是

$$ {}_k^hV^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})=\bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|}-{}_hP^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}^{(m)} $$

同理可得，在 UDD 假设条件下，有类似于式（5.5.1）的公式，即

$$ {}_k^hV^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})-{}_k^hV(\bar{A}_{x:\overline{n}|})=-\beta(m)\ {}_hP^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\ {}_kV_{x:\overline{n}|}^{1} $$

或

$$ {}_k^hV^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})={}_k^hV(\bar{A}_{x:\overline{n}|})-\beta(m)\ {}_hP^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\ {}_kV_{x:\overline{n}|}^{1} \tag{5.5.2} $$

读者可视作练习，给予验证。

在死亡均匀分布假设下，对式（5.5.2）取极限，即令 $m\to\infty$ 时，可得到全连续式两全保险责任准备金公式，即在 UDD 假设条件下，全连续式两全保险的责任准备金公式是

$$ {}_k^h\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})={}_k^hV(\bar{A}_{x:\overline{n}|})-\beta(\infty)\ {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\cdot{}_kV_{x:\overline{n}|}^{1} \tag{5.5.3} $$

读者应注意：式（5.5.3）中的定期寿险责任准备金是全离散式的。

［例 5.5.2］ 设年龄为 50 岁男性，投保了每年分两次缴费的保险金额为 10000 元的 20 年两全保险，利用附录Ⅲ（CL1 非养老金业务男性表）的换算表数值，试在年利率 $i=2.5\%$ 及 UDD 假设条件下计算：

（1）在全离散式下，该保单在第 10 个保单年度的期末准备金；

（2）在半连续式下，该保单在第 10 个保单年度的期末准备金；

解：（1）先计算 ${}_{10}V_{50:\overline{20}|}$、${}_{10}V_{50:\overline{20}|}^{1}$ 和 $\ddot{a}_{60:\overline{10}|}^{(2)}$

$$ A_{60:\overline{10}|}^{1}=\frac{M_{60}-M_{70}}{D_{60}}=0.10424095 $$

$$ A_{60:\overline{10}|}=\frac{M_{60}-M_{70}+D_{70}}{D_{60}}=0.79054148 $$

$$A^1_{50:\overline{20|}} = \frac{M_{50} - M_{70}}{D_{50}} = 0.11545530$$

$$A_{50:\overline{20|}} = \frac{M_{50} - M_{70} + D_{70}}{D_{50}} = 0.62821591$$

$${}_{10}E_{60} = \frac{D_{70}}{D_{60}} = 0.68630053$$

$${}_{20}E_{50} = \frac{D_{70}}{D_{50}} = 0.51276060$$

$$\ddot{a}_{60:\overline{10|}} = \frac{N_{60} - N_{70}}{D_{60}} = 8.58779560$$

$$\ddot{a}_{50:\overline{20|}} = \frac{N_{50} - N_{70}}{D_{50}} = 15.24314791$$

$$\ddot{a}^{(2)}_{60:\overline{10|}} = \alpha(2)\ddot{a}_{60:\overline{10|}} + \beta(2)(1 - {}_{10}E_{60}) = 8.5089170$$

$$\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20|}} = \alpha(2)\ddot{a}_{50:\overline{20|}} + \beta(2)(1 - {}_{20}E_{50}) = 15.1207497$$

$$P_{50:\overline{20|}} = \frac{M_{50} - M_{70} + D_{70}}{N_{50} - N_{70}} = 0.04121301$$

$$P^1_{50:\overline{20|}} = \frac{M_{50} - M_{70}}{N_{50} - N_{70}} = 0.00757442$$

$$P^{(2)}_{50:\overline{20|}} = \frac{A_{50:\overline{20|}}}{\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20|}}} = 0.04154661$$

$${}_{10}V^1_{50:\overline{20|}} = A^1_{60:\overline{10|}} - P^1_{50:\overline{20|}}\ddot{a}_{60:\overline{10|}} = 0.03919338$$

$${}_{10}V_{50:\overline{20|}} = A_{60:\overline{10|}} - P_{50:\overline{20|}}\ddot{a}_{60:\overline{10|}} = 0.43661257$$

故 $${}_{10}V^{(2)}_{50:\overline{20|}} = A_{60:\overline{10|}} - P^{(2)}_{50:\overline{20|}}\ddot{a}^{(2)}_{60:\overline{10|}} = 0.4370248$$

或

$${}_{10}V^{(2)}_{50:\overline{20|}} = {}_{10}V_{50:\overline{20|}} - \beta(2)P^{(2)}_{50:\overline{20|}}\,{}_{10}V^1_{50:\overline{20|}} = 0.4370248$$

故该保单在第 10 个保单年度的期末准备金是

$$10000 \cdot {}_{10}V^{(2)}_{50:\overline{20|}} = 4370.25(\text{元})$$

(2) $$\bar{A}^1_{50:\overline{20|}} = \frac{i}{\delta}A^1_{50:\overline{20|}} = 0.11689261$$

$$\bar{A}^1_{60:\overline{10|}} = \frac{i}{\delta}A^1_{60:\overline{10|}} = 0.10553865$$

$$\bar{A}_{50:\overline{20|}} = \bar{A}^1_{50:\overline{20|}} + {}_{20}E_{50} = 0.62965321$$

$$\bar{A}_{60:\overline{10|}} = \bar{A}^1_{60:\overline{10|}} + {}_{10}E_{60} = 0.79183918$$

$$P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20|}}) = \frac{\bar{A}_{50:\overline{20|}}}{\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20|}}} = 0.04164167$$

$$P(\bar{A}_{50:\overline{20|}}) = \frac{\bar{A}_{50:\overline{20|}}}{\ddot{a}_{50:\overline{20|}}} = 0.04130730$$

故 $$\begin{aligned}{}_{10}V^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20|}}) &= \bar{A}_{60:\overline{10|}} - P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20|}})\ddot{a}^{(2)}_{60:\overline{10|}} \\ &= 0.79183918 - 0.35432551 \\ &= 0.4375137\end{aligned}$$

故该保单在第 10 个保单年度的期末准备金是

$$10000 \cdot {}_{10}V^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20|}}) = 4375.14(\text{元})$$

这里

$${}_{10}V(\bar{A}_{50:\overline{20|}}) = \bar{A}_{60:\overline{10|}} - P(\bar{A}_{50:\overline{20|}})\ddot{a}_{60:\overline{10|}} = 0.4370954$$

故

$${}_{10}V^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20|}}) - {}_{10}V(\bar{A}_{50:\overline{20|}}) = 0.0004183$$

即

$$-\beta(2)P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20|}})\ {}_{10}V^{1}_{50:\overline{20|}} = 0.004183$$

5.5.3 非整数期的责任准备金

对于每年分 m 次缴费的寿险模型，其非整数期的责任准备金，仅讨论每年分两次缴费（即半年缴付一次保险费）的情形。

假设（x）签约全离散式寿险保单，在第 $j+1$ 个保单年度末支付死亡保险金为 b_j（$j=0, 1, 2, \cdots$），而 $\pi_j^{(2)}$ 是每年分两次按期初缴费的年缴保费，对于非负整数 k 及非整数 s（$0<s<1$），在非整数期（$k+s$）时责任准备金记作 ${}_{k+s}V^{(2)}$。下面分两种情形讨论。

1. 当 $0<s<\dfrac{1}{2}$ 时，根据未来法，则在（$k+s$）时的责任准备金是：

$${}_{k+s}V^{(2)} = b_{k+1} \cdot v^{1-s} \cdot {}_{1-s}q_{x+k+s} + {}_{k+1}V^{(2)} \cdot v^{1-s} \cdot {}_{1-s}p_{x+k+s} - \frac{\pi_k^{(2)}}{2} \cdot v^{\frac{1}{2}-s} \cdot {}_{0.5-s}p_{x+k+s} \tag{5.5.4}$$

若在每一年死亡均匀分布的条件下，容易得

$$\begin{aligned} {}_{k+s}V^{(2)} = \frac{v^{1-s}}{1-s \cdot q_{x+k}} \{ & (1-s)(1+i) \cdot {}_{k}V^{(2)} + (s \cdot p_{x+k})\ {}_{k+1}V^{(2)} \\ & + \frac{\pi_k^{(2)}}{2}[(1-s)(1+i) - s(1+i)^{\frac{1}{2}}\ {}_{0.5}p_{x+k}] \} \end{aligned} \tag{5.5.5}$$

又假设年利率 i 与 q_{x+k} 很小，则式（5.5.5）可近似为

$${}_{k+s}V^{(2)} \approx (1-s) \cdot {}_{k}V^{(2)} + s \cdot {}_{k+1}V^{(2)} + \left(\frac{1}{2} - s\right)\pi_k^{(2)} \tag{5.5.6}$$

注意：这里未经过净保费等于 $\dfrac{\left(\frac{1}{2}-s\right)\pi_k^{(2)}}{2}$。

2. 当 $\dfrac{1}{2}<s<1$ 时，根据未来法，则有类似于式（5.5.5）在非整数期（$k+s$）时的责任准备金表示形式，且在 *UDD* 假设条件下，其责任准备金的近似计算公式是：

$${}_{k+s}V^{(2)} \approx (1-s) \cdot {}_{k}V^{(2)} + s \cdot {}_{k+1}V^{(2)} + (1-s)\pi_k^{(2)} \tag{5.5.7}$$

它也是期末责任准备金的线性插值加上时间 s 时的未经过纯保费。

§5.6 比例责任准备金

本节讨论第三章第六节涉及的按比例分担或连续贴现保费情况下对应的责任准备金。对整数 k 运用未来法，则

$$ {}_k^hV^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_hP^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\ddot{a}^{\{m\}}_{x+k:\overline{h-k}|} \quad (k < h) \tag{5.6.1} $$

根据第三章第六节以及式（2.7.7），可得

$$ {}_hP^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{d^{(m)}}{\delta}\,{}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) $$

$$ \ddot{a}^{\{m\}}_{x+k:\overline{h-k}|} = \frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_{x+k:\overline{n-k}|} $$

代人式（5.6.1）得

$$ {}_k^hV^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\ \bar{a}_{x+k:\overline{h-k}|} = {}_k^h\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) \tag{5.6.2} $$

这意味着，不管缴费模式如何，（在每个保单年度末），完全连续责任准备金可作为比例责任准备金。

在第三章第六节中，比例分担保费可分解为

$$ P^{\{1\}}(\bar{A}_x) = P(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x^{PR}) $$

其中上标 PR 表示保费退款受益。对责任准备金也可作类似的分解。为证实这一点，运用未来法与式（3.6.8）可得

$$ \begin{aligned} {}_kV(\bar{A}_x^{PR}) &= \bar{P}(\bar{A}_x)\frac{\bar{A}_{x+k} - A_{x+k}}{\delta} - P(\bar{A}_x^{PR})\ddot{a}_{x+k} \\ &= \bar{P}(\bar{A}_x)\frac{d\ddot{a}_{x+k} - \delta\bar{a}_{x+k}}{\delta} - [P^{\{1\}}(\bar{A}_x) - P(\bar{A}_x)]\ddot{a}_{x+k} \end{aligned} $$

由

$$ \frac{d}{\delta}\bar{P}(\bar{A}_x) = P^{\{1\}}(\bar{A}_x) \tag{5.6.3} $$

可将以上表达式化成

$$ \begin{aligned} {}_kV(\bar{A}_x^{PR}) &= -\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+k} + P(\bar{A}_x)\ddot{a}_{x+k} \\ &= \bar{A}_{x+k} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+k} - [\bar{A}_{x+k} - \bar{P}(\bar{A}_x)\ddot{a}_{x+k}] \\ &= {}_k\bar{V}(\bar{A}_x) - {}_kV(\bar{A}_x) \\ &= {}_kV^{\{1\}}(\bar{A}_x) - {}_kV(\bar{A}_x) \end{aligned} $$

于是有

$$ {}_kV^{\{1\}}(\bar{A}_x) = {}_kV(\bar{A}_x) + {}_kV(\bar{A}_x^{PR}) \tag{5.6.4} $$

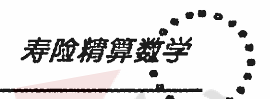
§ 5.7 亏损按各保险年度分摊

从式（5.2.19）可以看出，每个保单年度的净保费可分解为风险净额的 1 年定期寿险的净保费与累积责任准备金的储蓄基金之存人额。后者并无死亡风险，因此，可以设想保险亏损的方差可用一年期保险的有关方差来表示。事实的确如此，而且还得出计算保险亏损方差的一种简便方法。

引入一般离散式保险，亏损 $L = {}_0L$，根据式（5.2.8），可表示为

$$ L = b_{K+1}v^{K+1} - \sum_{h=0}^{K}\pi_h v^h \tag{5.7.1} $$

其中 K 是（x）未来寿命整年数，L 是死亡发生在保单年度 $K+1$ 时该保险财务结果



在保单生效之时的现值。我们试图在例 5.2.10 的基础上，将其一部分在前 $k+1$ 的每一年进行分摊。为此，在时间 h 时由保单年度 $h+1$ 年的每一年进行分摊。在时间 h 时由保单年度 $h+1$ 分摊的亏损是

$$\Lambda_h = \begin{cases} 0 & (K \leqslant h-1) \\ vb_{h+1} - ({}_hV + \pi_h) & (K = h) \\ v_{h+1}V - ({}_hV + \pi_h) & (K \geqslant h+1) \end{cases} \tag{5.7.2}$$

显然，Λ_h 是依赖于 K 的。第一种情形 $K \leqslant h-1$ 代表被保险人在第 $h+1$ 年之前死亡，第二种情形代表在第 $h+1$ 年里死亡，第三种情形则表示在第 $h+1$ 年以后死亡。

根据式 (5.2.16) 可将 Λ_h 改写成

$$\Lambda_h = \begin{cases} 0 & (K \leqslant h-1) \\ (b_{h+1} - {}_{h+1}V)v - (b_{h+1} - {}_{h+1}V)vq_{x+h} & (K = h) \\ 0 - (b_{h+1} - {}_{h+1}V)vq_{x+h} & (K \geqslant h+1) \end{cases} \tag{5.7.3}$$

而 $(b_{h+1} - {}_{h+1}V)\ vq_{x+h}$ 是风险净额 $(b_{h+1} - {}_{h+1}V)$ 在第 $h+1$ 年的一年期保险的纯保费。由此可见，Λ_h 非零值表示的亏损与一年定期寿险相联系，即时间 h 时受益现值减去趸缴纯保费。这样，从式 (5.7.3) 可得

$$E[\Lambda_h] = v(b_{h+1} - {}_{h+1}V)[p_{x+h} \cdot {}_hp_x \cdot q_{x+h} + (-1)q_{x+h} \cdot {}_hp_x \cdot p_{x+h}] = 0 \tag{5.7.4}$$

于是

$$\begin{aligned} Var[\Lambda_h] &= E[(\Lambda_h)^2] \\ &= v^2(b_{h+1} - {}_{h+1}V)^2[(p_{x+h})^2 \cdot {}_hp_x \cdot q_{x+h} + (-1)^2(q_{x+h})^2 \cdot {}_hp_x \cdot p_{x+h}] \\ &= v^2(b_{h+1} - {}_{h+1}V)^2 \cdot {}_hp_x \cdot p_{x+h} \cdot q_{x+h} \end{aligned} \tag{5.7.5}$$

根据一般推理，总亏损应等于每个保单年度亏损的现值之和，即

$$L = \sum_{h=0}^{\infty} v^h \Lambda_h \tag{5.7.6}$$

从式 (5.7.4) 与式 (5.7.6)，可确定 $E[L]=0$，且

$$Cov[\Lambda_h, \Lambda_j] = 0, (h \neq j)$$

和

$$Var[L] = \sum_{h=0}^{\infty} v^{2h} Var[\Lambda_h] \tag{5.7.7}$$

式 (5.7.7) 的意义在于：L 的方差可按各保险年度分摊。

下面，我们考虑在 $x+k$ 岁开始的保险，初始保费 $\pi'_0 = {}_kV + \pi_k$，随后的保费为 $\pi'_k = \pi_{k+h}$ $(h=1, 2, \cdots)$，保险受益金 $b'_h = b_{k+h}$，责任准备金 ${}_hV' = {}_{k+h}V$，相应的亏损变量为 Λ'_h 与 L' $(h=1, 2, \cdots)$。由式 (5.2.8) 可得

$$\begin{aligned} {}_kL &= b_{k+J+1}v^{J+1} - \sum_{h=0}^{J} \pi_{k+h} \cdot v^h \\ &= b'_{J+1}v^{J+1} - \sum_{h=0}^{J} \pi'_k v^h + {}_kV = L' + {}_kV \end{aligned}$$

再根据式 (5.7.5)

$$Var[{}_kL] = Var[L'] = \sum_{h=0}^{\infty} v^{2h} Var[\Lambda'_h]$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} v^{2h} v^2 (b'_{h+1} - {}_{h+1}V')^2 \cdot {}_h p_{x+k} \cdot p_{x+k+h} \cdot q_{x+k+h}$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} v^{2h} {}_h p_{x+k} [v^2 (b_{k+h+1} - {}_{k+h+1}V)^2 \cdot p_{x+k+h} \cdot q_{x+k+h}] \quad (5.7.8)$$

读者注意：方括号内的项代表未来 $k+h+1$ 年度风险净额的一年期保险的亏损方差。

习　题　五

1. 试利用附录Ⅲ（CL1—非养老金业务男性表）的换算表数值，在年利率 $i=2.5\%$ 的情况下，考察年龄为 100 岁的男性购买保险金额为 1000 元的终身寿险保单在各保单年终时结算的情况。

2. 设年龄为 25 岁的男性，购买保单金额为 1000 元的寿险保单。利用附录Ⅲ（CL1—非养老金业务男性表）的换算表数值，在年利率 $i=2.5\%$ 的情况下，试用过去法计算下列各种保单在第三个保单年度的期末准备金：

(1) 普通终身寿险；

(2) 30 年限期缴费的终身寿险；

(3) 65 岁满期的定期寿险；

(4) 65 岁满期的两全保险；

(5) 25 年限期缴费 65 岁满期的两全保险。

3. 试证：

(1) ${}_kV_{x:\overline{n}|} = (P_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|})\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$

(2) ${}_kV_{x:\overline{n}|} = [1 - P_{x:\overline{n}|}/P_{x+k:\overline{n-k}|}]A_{x+k:\overline{n-k}|}$

4. 已知 $P_{45}=0.014$，$P_{45:\overline{20}|}^{\ \ 1}=0.022$，$P_{45:\overline{20}|}=0.030$，计算 ${}_{20}V_{45}$

5. 设 P_x 为保险金额为 1 元的在 x 岁时签单的年缴纯保费，试证：

(1) ${}_nE_x \cdot {}_nV_x = P_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - A^1_{x:\overline{n}|}$

(2) ${}_nV_x = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_x}$

(3) ${}_kV_{x:\overline{n}|} = 1 - \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}/\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

6. 对于 (55) 的一份 20 年期全离散式两全保险，给定如下条件：

(1) 第 k 年的死亡给付为 $b_k=(21-k)$，$k=1, 2, \cdots, 20$

(2) 到期支付额为 1

(3) 保费采取均衡缴纳方式

(4) ${}_kV$ 表示第 k 年末的责任准备金，$k=1, 2, \cdots, 20$

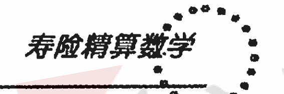
(5) ${}_{10}V=5.0$

(6) ${}_{19}V=0.6$

(7) $q_{65}=0.10$

(8) $i=0.08$

计算 ${}_{11}V$。



7. 设 $k<\frac{n}{2}$，${}_kV_{x:\overline{n}|}=\frac{1}{6}$，且 $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}+\ddot{a}_{x+2k:\overline{n-2k}|}=2\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$，计算 ${}_kV_{x+k:\overline{n-k}|}$。

8. 当 $0<k\leqslant m$ 时，试证：

$$ {}_kV_{x:\overline{m+n}|}={}_kV^1_{x:\overline{m}|}+{}_kV_{x:\overline{m}|}^{\ \ 1}\cdot{}_mV_{x:\overline{m+n}|} $$

9. 设保险金额为 1 元的一离散式普通终身寿险的未来损失为 ${}_kL$，试证：

$$ Var({}_kL)=\left(1+\frac{p_x}{d}\right)^2[{}^2A_{x+k}-(A_{x+k})^2] $$

10. 设一份在 20 岁签发保额为 1000 元的终身寿险，已知

(i) $1000P_{20}=10$

(ii) $1000\,{}_{20}V_{20}=490$

(iii) $1000\,{}_{21}V_{20}=545$

(iv) $1000\,{}_{22}V_{20}=605$

(v) $q_{40}=0.022$

计算 q_{41}

11. 试证：

(1) ${}_kV_x=(P_{x+k}-P_x)\,\ddot{a}_{x+k}$

(2) ${}_kV_{x:\overline{n}|}=(P_{x+k:\overline{n-k}|}-P_{x:\overline{n}|})\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$

12. 设 $i=0.04$，${}^{20}_{23}V_{15}=0.585$，${}^{20}_{24}V_{15}=0.600$，计算 P_{38}

13. 设年龄为 25 岁的男性，购买保险金额为 1000 元的全离散式寿险保单。利用附录Ⅲ（CL1—非养老金业务男性表）的换算表数值，在年利率 $i=2.5\%$ 的情况下，试用未来法计算下列各种保单在第 25 个保单年度的期末责任准备金：

(1) 普通终身寿险；

(2) 30 年限期缴费的终身寿险；

(3) 65 岁满期的定期寿险；

(4) 65 岁满期的两全保险；

(5) 20 年限期缴费的 40 年两全保险。

14. 设 60 岁缴清的全离散式终身寿险保单，于女性被保险人 45 岁时被签发，保险金额为 10000 元。根据附录Ⅲ（CL2—非养老金业务女性表）的换算表数值，在年利率 $i=2.5\%$ 的情况下，试求其在第 20 个保单年度的期初准备金、期中准备金及期末准备金。

15. 某个 35 岁签发的全离散式保险，被保险人在 10 年后死亡的给付金额是 2500 元，设准备金以利率 $i=0.1$ 计算，年均衡保费为 P，已知 ${}_9V+P={}_{10}V=500$，计算 q_{44}

16. 试证：在趸缴保费的条件下

(1) ${}_kV_x=A_{x+k}$ $(k=1,2,\cdots)$

(2) ${}_kV^1_{x:\overline{n}|}=A^1_{x+k:\overline{n-k}|}$ $(k=1,2,\cdots,n)$

(3) ${}_kV_{x:\overline{n}|}=A_{x+k:\overline{n-k}|}$ $(k=1,2,\cdots,n)$

17. 已知

(1) $\ddot{a}_{40}=14.81661$，$\ddot{a}_{45}=14.11209$，$\ddot{a}_{60}=11.14535$

$\ddot{a}_{45:\overline{5}|}=4.42893$，$\ddot{a}_{40:\overline{10}|}=7.69664$

(2) $i=0.06$，$\alpha(2)=1.00021$，$\beta(2)=0.25739$

（3）$l_{60}=81880.73$，$l_{77}=48281.81$，$l_{78}=45303.60$

计算

（a）$1000\,{}_{20}V_{40}$

（b）$1000\,{}_{20}V_{40}^{(2)}$（UDD 假设）

（c）$1000\,{}^{10}_{5}V_{40}$

（d）$1000\,{}^{10}_{20}V_{40}$

18. 试证：

（1）${}_{k}V_{x}=\dfrac{A_{x+k}-A_{x}}{1-A_{x}}$

（2）${}_{k}V_{x}=\dfrac{P_{x+k}-P_{x}}{P_{x+k}+d}$

19. 已知

（i）$1000\,{}_{t}\bar{V}(\bar{A}_{x})=100$

（ii）$1000\bar{P}(\bar{A}_{x})=10.50$

（iii）$\delta=0.03$

计算 $\bar{a}_{x+t}$

20. 对某三年期全离散式两全保险，保额为 3，用平衡原理决定的净年缴保费为 0.94，按照有效利率 20% 产生的责任准备金如下

年度末	责任准备金
1	0.66
2	1.56
3	3.00

计算 q_x

21. 试证：

$$Var({}_{t}L)=\frac{{}^{2}\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}-(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|})^{2}}{(\delta a_{x:\overline{n}|})^{2}}$$

其中，${}_{t}L$ 是年龄为 x 岁者签发保险金额为 1 元的全连续式 n 年的储蓄寿险保单，自签单后的 t 时刻未来损失的随机变量。

22. 年龄为 x 岁者，以趸缴保费方式签订年金额为 1 元的全连续式定期生存年金，自签单后的 t 时刻的未来损失为：

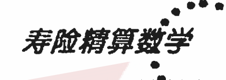
$${}_{t}L=\begin{cases}\bar{a}_{\overline{U}|} & (0\leqslant U<n-t)\\ \bar{a}_{\overline{n-t}|} & (U\geqslant n-t)\end{cases}$$

计算：

（1）${}_{t}L$ 的期望值 $E[{}_{t}L]$；

（2）${}_{t}L$ 的方差值 $Var[{}_{t}L]$。

23. 年龄为 45 岁者，以趸缴保费方式签约全连续式的 10 年定期寿险保单，保险金额



为 1 元。试写出第 5 个保单年度末准备金的未来法公式。

24. 假设有一份在 40 岁签发的全离散式终身寿险，已知

(i) 死亡给付在前 20 年为 1000，接下来的 5 年为 5000，以后为 1000

(ii) 年均衡保费为 π

(iii) $A_{40}=0.16132$ $A_{60}=0.36913$ $A_{65}=0.43980$

$_5E_{60}=0.68756$ $_{20}E_{40}=0.27414$

(iv) $i=0.06$

计算该保险在第 20 个保单年度末的责任准备金

25. 试证：

$$_{h+1}V=(_hV+\pi_h)\frac{1+i}{p_{x+h}}-b_{h+1}\frac{q_{x+h}}{p_{x+h}}$$

26. 在 100 份延期生存年金的组合中给出如下条件

(i) 此年金为 10 年延期生存年金并且以连续方式每年进行年金为 1 的支付

(ii) 死亡不进行支付

(iii) 保险费在延期期限中连续支付

(iv) 在 2000 年 1 月 1 日的保险组合为

签单年龄	签单日期	数量
40	1998 年 1 月 1 日	60
50	1994 年 1 月 1 日	40

(v) $\mu(x)=0.03$，$x\geqslant 0$

(vi) $\delta=0.05$

试根据以上给出的条件

(a) 计算 $\bar{P}\ ({}_{10|}\bar{a}_{40})$

(b) 计算签单年龄为 (50) 的保单在 2001 年 1 月 1 日的责任准备金

(c) 计算在 2005 年 1 月 1 日的期望累计责任准备金

(d) 假设一位在 50 岁签单的投保人在 2005 年 1 月 1 日死亡，计算此人投保该保险的损失

27. 假设有一份在 68 岁投保的全离散式两全保险，已知

(i) $\ddot{a}_{68}=9.686158$，$\ddot{a}_{70}=9.075861$，$\ddot{a}_{77}=6.973059$

$q_{73}=0.0433$，${}_{15|}q_{68}=0.0441$，$l_{73}=5920515$

$l_{77}=4828285$，$l_{68}=7018508$

(ii) $i=0.05$

(iii) 当 $k\neq 5$ 时的年缴纯保费为

$\pi_k=1000P_{68}$，$k=0,1,2,3,4,6,7,\cdots,19$

(iv) $\pi_5>0$

(v) 当 $k+1\neq 16$ 时的死亡给付为 $b_{k+1}=1000$，$k+1=1,2,\cdots,14,15,17,18,19,20$

(vi) $b_{16}>0$

(vii) 生存给付为 1000 元

(viii) $1000P_{68}=55.62$，　　$\ddot{a}_{68:\overline{20}|}=9.351599$

$1000A_{68:\overline{20}|}=554.69$，　　$\ddot{a}_{85:\overline{3}|}=2.521820$

试根据以上给出的条件

(a) 计算${}_{17}V_{68:\overline{20}|}$

(b) 计算${}_{2}V_{68:\overline{20}|}$

(c) 假设${}_{5}V_{68:\overline{20}|}=157.00$，${}_{6}V_{68:\overline{20}|}=292.00$，计算 π_5

(d) 假设 $\pi_5=270$，计算 b_{16}和${}_{9}V_{68:\overline{20}|}$

28. 试证：在 *UDD* 假设条件下，有

$$\frac{{}_5V^{(4)}_{30:\overline{20}|}-{}_5V_{30:\overline{20}|}}{{}^{20}_{5}V^{(4)}_{30}-{}^{20}_{5}V_{30}}=\frac{A_{30:\overline{20}|}}{A_{30}}$$

29. 试证：

(1) ${}_kV_x^{(m)}=(p_{x+k}^{(m)}-p_x^{(m)})\ddot{a}_{x+k}^{(m)}$；

(2) ${}_kV_x^{(m)}=\left(1-\dfrac{p_x^{(m)}}{p_{x+k}^{(m)}}\right)A_{x+k}$；

(3) ${}_kV_x^{(m)}=p_x^{(m)}s_{x:\overline{k}|}^{(m)}-{}_kk_x$。

30. 假设年龄为 50 岁男性，投保了每年缴费 4 次（即按季缴费）的 20 年储蓄寿险，保险金额为 10000 元。试在利率 $i=0.025$ 及 *UDD* 假设条件下计算。(利用附录Ⅲ（CL1—非养老金业务男性表))：

(1) 在全离散式下该保单于第 10 个保单年度的期末准备金；

(2) 在半连续式下该保单于第 10 个保单年度的期末准备金。

31. 证明：

(1) $P^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})={}_nP^{\{m\}}(\bar{A}_x)+(1-\bar{A}_{x+n})P^{\{m\}}_{x:\overline{n}|}{}^{1}$；

(2) ${}_kV^{\{m\}}(\bar{A}_x)={}_h\bar{V}(\bar{A}_x)$。

32. 对于一般全离散式保险，考虑亏损

$$L=b_{k+1}\cdot v^{k+1}-\sum_{h=0}^{k}\pi_h v^h$$

在时间 h 时由保单年度 $h+1$ 分摊的亏损是

$$\Lambda_h\begin{cases}0 & (k\leqslant h-1)\\ vb_{h+1}-({}_hV+\pi_h) & (k=h)\\ v\cdot{}_{h+1}V-({}_hV+\pi_h) & (k\geqslant h+1)\end{cases}$$

证明：$Var[L]=\sum\limits_{h=0}^{\infty}v^{2h}Var[\Lambda_h]$。



第六章

总保费与修正准备金

本章主要内容：本章考虑了保单中的各项附加费用以及公司营运的合理利润等因素，介绍了精算等价原理，给出了分级费率法和保单费附加法等厘定总保费的方法，而且在第四章纯保费准备金的基础上阐述了总保费准备金的计算方法。分不考虑费用的情况和考虑费用的情况介绍预期盈余的计算。并且引入修正准备金，从修正准备金的一般方法出发，进一步介绍一年定期修正制和保单分类修正制两种常用的具体做法。

本章主要词汇：总保费　总保费准备金　预期盈余　修正准备金

§6.1　总保费厘定原理

在第二章与第三章中，纯保费是通过精算等价原理来确定的。由于纯保费只用于未来的保险给付，所以在计算过程中只需考虑死亡率与利率这两个因素。总保费（也称毛保费）是保险人向投保人实际收取的保费，其中不但包含保险给付的成本，也包含保险经营的费用以及合理的利润。平衡保险经营费用并给保险人带来合理利润的这部分保费称为附加保费。因此，在厘定总保费的过程中必须考虑附加保费，从而需要研究各种费用的性质及其分配方法。

6.1.1　费用的分类与分配

保险公司在经营过程中所发生的费用可分为两大类：一类是因运用保险资金而发生的费用。例如，设立一个投资部所需开支的员工工资和租赁场地的租金，以及购买设备的费

用；购买和出售有价证券或不动产所需支付的服务费及缴纳的税金等等。这一类费用称为投资费用，通常在投资收入中扣除，以计算净投资收益率。以净投资收益率为基础的预定利率已将这类费用反映在保费中了，因此，将不再分析投资费用。另一类是因保险业务而发生的费用，称为保险费用。下面将对这类费用进行分析。

在总保费的厘定中，保险费用的分类和分配是一项很复杂的工作，各寿险公司的做法也不尽相同，但大体上都按费用开支目的进行如表 6-1 所示的分类：

表 6-1　　寿险公司可能采用的费用分类制度

费 用 类 别	费 用 细 目
1. 业务获得费用	(1) 销售费用，包括代理人佣金和广告费 (2) 风险分类，包括体检 (3) 新保单制作与记录
2. 保单维护费用	(1) 保费收取与记账 (2) 受益人更换和保单选择权准备 (3) 与保单持有人通讯联系
3. 一般费用	(1) 调查与研究费用 (2) 精算和一般法律服务 (3) 一般会计费用，包括工资、佣金、水电费等 (4) 保费税
4. 理赔费用	(1) 索赔调查和法律辩护 (2) 保险金支付费

费用的分类制度确定以后，就可以根据费用项目与相应的业务活动相联系这一原则对费用进行分配。一些费用项目及数额与业务活动的性质及数量有着自然的联系。例如，代理人的佣金是直接根据所收保费数额来确定的，因此可以表示为保费的一个百分比。通常保单初年度佣金很高，续年度较低。保费税也是保费的一个百分比，通常续年度税率与初年度相同。核保的费用只发生在初年度，与保额的大小有关。一般对于每张保单，一部分按固定数额收取，另一部分可按每 1000 元保额来分配。签单与记录的费用也只发生在初年度，与保额和保费的多少没有多大关系，每份保单上的花费大致相同。

另一些费用项目与业务活动的联系并不是直接的，表 6-1 所列一般费用中的 (1)、(2)、(3) 三项即是。例如，办公场所的租金和水电费，就很难直接与某笔业务联系起来。对于这些费用，常常需要结合统计分析和经验来进行分配。在实务中，各寿险公司的做法可能大不一样。

费用的分类和分配是控制一个保险系统营运的重要管理工具。然而在保费的确定中，考虑费用是用前瞻的观点而不是回溯的观点，其目的是用未来的附加保费来平衡未来将发生的费用。这样，预期的费用膨胀或紧缩的趋势也包含在附加保费中。

表 6-2 是根据表 6-1 的费用分类制度以某种保单为例所作的一个保险费用分配表。作为一个费用的分配例子，该表或许能使读者有一个更明了的认识。

表 6-2　　保险费用分配表

费用类型	初年度			续　年　度			
	每张保单	每 1000 元保额	保费百分比	每张保单	每 1000 元保额	各年度的费用百分比（%）	
						2~9	10 以上
1. 获得费用							
(1) 销售费用							
佣金	—	—	60	—	—	7.0	4.0
销售部的费用	—	—	25		—	2.5	1.0
其他销售费用	12.50	4.00	—	—	—	—	—
(2) 分类费用	18.00	0.50	—	—	—	—	—
(3) 签单和记录	4.00	—	—	—	—	—	—
2. 维持费用	2.00	0.25	—	2.00	0.25	—	—
3. 一般费用							
(1), (2), (3)	4.00	0.25	—	4.00	0.25	—	—
(4) 保费税	—	—	2	—	—	2.0	2.0
总计（1, 2, 3 项）	40.50	5.00	87	6.00	0.50	11.5	7.0
4. 理赔费用	每张保单 20.00 元加上每 1000 元保额 0.10 元						

6.1.2　总保费的计算

总保费的计算也是基于精算等价原理，即

总保费的精算现值 = 保险给付的精算现值 + 保险费用的精算现值

在计算保险费用的精算现值时，假设各期保险费用都在期初支出，在实务中，通常还需考虑退保的影响以及一定的利润率。这时需在等式的右边加上"退保给付的精算现值"，在保险费用中加进一个"利润边际"。当然这样计算会复杂一些，主要是因为加上退保给付后，保险人要考虑的是被保险人的死亡风险与退休风险的交互影响，而不是被保险人的死亡风险的单独作用。有关两种以上风险的交互作用将在多元风险模型中讨论。

不管需要考虑的因素多么复杂，精算等价原理却非常简单，即未来的收入和支出应当在精算现值上平衡。下面通过一个例子来说明总保费的计算。

［例 6.1.1］　年龄 x 岁的人购买一张保额为 50000 元的终身寿险保单，保费与保险金的支付方式为半连续式。如果费用的分配如表 6-2 所示，试用精算等价原理推导其年缴总保费公式。

解：因为理赔费用的发生与否及发生时间与保险给付基本相同，两者精算现值可以一并计算得

$$[50000 + (20 + 0.1 \times 50)]\bar{A}_{[x]} = 50025\bar{A}_{[x]}$$

设年缴总保费为 G，各年的费用均假设在年初发生，则初年度费用的精算现值为

$$40.50 + 250 + 0.87G$$

续年度费用的精算现值为

$$6a_{[x]} + 25a_{[x]} + (0.115Ga_{[x]:\overline{8}|} + 0.07G\,{}_{8|}a_{[x]})$$

于是根据精算等价原理，得

$$G\ddot{a}_{[x]} = 50025\bar{A}_{[x]} + (40.50 + 250 + 0.87G) + [6a_{[x]} + 25a_{[x]} + (0.115Ga_{[x]:\overline{8}|} + 0.07G\,_{8|}a_{[x]})]$$

解出 G，得

$$G = \frac{50025\bar{A}_{[x]} + 290.50 + 31a_{[x]}}{0.13 + 0.93a_{[x]} - 0.045a_{[x]:\overline{8}|}}$$

如果每份保单都用这种方法来计算保费，操作起来会很不方便。实际上，寿险公司是先将保费率计算出来列成表，即费率表（通常根据性别、吸烟与否分类），再根据被保险人的年龄，也许还根据所要求的保额来查找相应的费率，保额乘上这个费率就是应缴的保费。下面就接着来讨论保险费率的计算问题。

6.1.3 保单费用与保险费率

在人寿保险中，保险费率一般用 1000 元死亡给付额应缴的保费来表示。在费用分配中，有些费用项目的全部或一部分是不随保额和保费变化的，这部分费用称为保单费用。由于存在保单费用，显然不同保额的保单其费率将有所不同。保额大的保单分配到每单位保额上的保单费用少，因此费率较低；反之，保额小的保单必然费率较高。下面用数学式子来说明这个问题。对于保额为 b 的保单的总保费 $G(b)$，令

$$G(b) = ab + c + fG(b) \tag{6.1.1}$$

这里 a，c 和 f 为非负数且 $f<1$。a 包含了直接随保额变化的那些保险成本的组成部分，每单位保额的纯保费是其中最大的部分；c 即为保单费用；f 是随保费变化的用于支付费用的保费比例。

式（6.1.1）可以写成

$$G(b) = b\frac{a + c/b}{1 - f} = bR(b)$$

这里

$$R(b) = \frac{a + c/b}{1 - f} \tag{6.1.2}$$

$R(b)$ 就是保额为 b 的保单的费率。由此可以看出，费率随保额的增加而变小。

如果对于每一不同的保额都算出相应的费率列入表中，这也是不切实际的。因为不管是精算人员制作费率表，还是代理人给客户试算保费，都会因太多的费率而感到麻烦。通常采用两种方法来解决这两个问题。

1. 分级费率法

将保单根据保额分成若干等级，在每一等级内根据保额的分布求出保额均值，这个平均保额通过式（6.1.2）算出的费率作为该等级内所有保单的费率。

[例 6.1.2] 一种趸缴保费人寿保险保单其保费的组成如下表。

表 6-3

纯保费	$\bar{A}_x = 0.20$
费用	
销售佣金	保费的 7.5%
保费税	保费的 3.0%
保单费用	
初年度	50.00 元
续年度	5.00 元
理赔费用	每张保单 15.00 元加每千元保额 0.30 元

保单的分级和各等级内的平均保额如下表。

表 6-4

保额等级	平均保额
25000 元 ~ 99999 元	78500 元
100000 元 ~ 249999 元	187500 元
250000 元 ~ 499999 元	366500 元
500000 元以上	648500 元

若预定利率 $i = 0.06$，求该种保单的分级费率。

解：设保额 b 以千元为单位，将第一个表中的数据代入式（6.1.1）中得

$$G(b) = (1000b + 0.30b)(0.2) + [15(0.2) + 50 + 5.00a_x] + (0.075 + 0.030)G(b)$$
$$= 200.06b + (53.00 + 5.00a_x) + 0.105G(b)$$

将 $a = 200.06$，$c = 53.00 + 5.00a_x$ 及 $f = 0.105$ 代入式（6.1.2），得

$$R(b) = \frac{200.06 + (53.00 + 5.00a_x)/b}{1 - 0.105}$$

由 $a_x = \frac{1 - (1 + i)A_x}{i} = \frac{1 - (1 + i)(\delta/i)\bar{A}_x}{i}$ 及 $i = 0.06$ 可算出 $a_x = 13.2353$。再将第二个表中的平均保额代入上式（注意 b 以千元为单位）可求得分级费率如下：

表 6-5

保额等级	分级费率（每千元保额之保费）
25000 元 ~ 99999 元	225.23 元
100000 元 ~ 24999 元	224.24 元
250000 元 ~ 499999 元	223.89 元
500000 元以上	223.74 元

2. 保单费附加法

将式（6.1.2）改写成

$$R(b) = a' + \frac{c'}{b} \tag{6.1.3}$$

这里，$a' = \frac{a}{1-f}$，$c' = \frac{c}{1-f}$，而总保费可由下式计算

$$G(b) = bR(b) = ba' + c' \tag{6.1.4}$$

这里，a'是没有考虑保单费用时的费率，c'称为保单费。所以，可先算出不包含保单费用的费率（这个费率对所有不同保额的保单都相同），将所要求的保额乘上这个费率，再加上不变的保单费便得到应缴保费。这种方法称为保单费附加法，算出的保费比分级费率法精确。

应当注意保单费与保单费用的区别。当加进保单费用而使保费增加时，像代理人佣金、保费税等这些按保费百分比计算的支出也相应增加，这时保费的增加数即保单费$\frac{c}{1-f}$自然应大于加进的保单费用 c。

[例 6.1.3] 一种年缴保费的终身寿险保单的费用分配如下表。

表 6-6

	保费百分数	每 1000 元保额（元）	保单费用（元）
初年度	30%	3.00	10.00
续年度	5%	0.50	2.50

试用精算等价原理和保单费附加法导出年缴保费计算公式。

解：（1）利用精算等价原理：记 $G(b)$ 为考虑保单费用的总保费（这里 b 以 1000 元为单位），则有

$$G(b)\ddot{a}_x = b(1000\bar{A}_x + 3 + 0.50a_x) + (0.30 + 0.05a_x)G(b) + 10 + 2.5a_x$$

得到：

$$G(b) = \frac{b(1000\bar{A}_x + 3 + 0.50a_x) + 10 + 2.5a_x}{[\ddot{a}_x - (0.30 + 0.05a_x)]}$$

（2）利用保单费附加法：以 $k(b)$ 记不考虑保单费用的保费，则有：

$$k(b)\ddot{a}_x = b(1000\bar{A}_x + 3 + 0.50a_x) + 0.30k(b) + 0.05k(b)a_x$$

$$k(b) = b\left(\frac{1000\bar{A}_x + 0.5\ddot{a}_x + 2.50}{0.95\ddot{a}_x - 0.25}\right) = ba'$$

保单费 c'应当平衡保单费用支出及由于加上这个保单费而增加的支出，因此，由精算等价原理，有

$$c'\ddot{a}_x = 10 + 2.50a_x + 0.30c' + 0.05c'a_x$$

$$c' = \frac{10 + 2.50a_x}{0.7 + 0.95a_x}$$

从而由式（6.1.4）得

$$G(b) = b\left(\frac{1000\bar{A}_x + 0.5\ddot{a}_x + 2.50}{0.95\ddot{a}_x - 0.25}\right) + \frac{10 + 2.50a_x}{0.7 + 0.95a_x}$$

读者可以验证，两种方法计算得到的年缴总保费的结果是一致的。

§6.2 总保费准备金

前面讨论了均衡纯保费准备金。若认为每年缴付的纯保费不变，则由于死亡率随着年龄上升，保险前期的纯保费支付死亡成本应有余而后期将不足，前期的余额应当积累起来以弥补后期的不足。这些余额的精算积累值就是纯保费准备金，在法律上是保险人对被保险人的负债。但是，保险人实际收取的是总保费而不是纯保费，支出的也不只是保险给付，还要开支各种费用。因此，无论法律是否规定以纯保费准备金作为负债，在会计上都需用包含费用的准备金作为负债来评估公司的经营状况。

中国保险监督管理委员会在 2005 年 1 月发布的《精算报告》中规定：保险公司须将所有业务划分为分红业务和非分红业务，分别计算总保费责任准备金，并判断实际提取准备金的充足性。而总保费责任准备金评估运用的假设，原则上应以本公司的实际经验为基础。对于缺乏经验数据的假设，可以参考行业一般经验结果或同等规模其他保险的经验。如果总保费责任准备金评估运用的假设同时考虑了公司实际经验分析和对未来趋势的预期，应做出具体说明。此外，对于长期业务中所占比例不大的非主要险种，可以不进行总保费责任准备金的具体计算，而采用比例近似的方法代替。比例近似方法分析应基于精算责任人的合理判断，即所采用的近似方法不会对最终的结果造成实质性的偏差，并且此部分业务实际提取保单责任准备金数额占比不得超过 5%。

6.2.1 总保费准备金的计算

将包含费用的准备金称为总保费准备金，其计算原理与纯保费准备金相同。根据过去法，有

总保费准备金 = 过去总保费收入的精算积累值 − 过去保险给付与费用支出的精算积累值

根据未来法，有

总保费准备金 = 未来保险给付与费用支出的精算现值 − 未来总保费收入的精算现值

同样，可定义包含费用的损失变量为

包含费用的损失变量 = 未来保险给付与费用支出的现值 − 未来总保费收入的现值

这个损失变量的期望值即总保费准备金。

[例 6.2.1] 一份保额为 100000 元的 30 岁签订的两全保险，保险期限为 30 年，缴费期为 20 年。设年缴保费为 G，续年度费用为 e，求第 10 个保单年度末的总保费准备金计算式。

解：因为初年度费用未知，所以只能用未来法计算。未来保险给付的精算现值为

$$100000\bar{A}_{40:\overline{20}|}$$

未来费用支出的精算现值为

$$e\ddot{a}_{40:\overline{20}|}$$

未来保费收入的精算现值为

$$G\ddot{a}_{40:\overline{10}|}$$

于是总保费准备金为

$$(100000\bar{A}_{40:\overline{20}|}+e\ddot{a}_{40:\overline{20}|})-G\ddot{a}_{40:\overline{10}|}$$

在例 6.2.1 中，也可以先列出包含费用的损失变量，设为${}_{10}L_e$，设 U 为死亡时间，有

$$ {}_{10}L_e=\begin{cases}100000v^U+e\ddot{a}_{\overline{J}|}-G\ddot{a}_{\overline{J}|} & (0\leqslant U<10)\\ 100000v^U+e\ddot{a}_{\overline{J}|}-G\ddot{a}_{\overline{10}|} & (10\leqslant U<20)\\ 100000v^{20}+e\ddot{a}_{\overline{20}|}-G\ddot{a}_{\overline{10}|} & (U\geqslant 20)\end{cases}$$

这里 $J=[U]$，为不超过 U 的最大整数。然后求${}_{10}L_e$ 的数学期望值，得

$$E[{}_{10}L_e]=100000\bar{A}_{40:\overline{20}|}+e\ddot{a}_{40:\overline{20}|}-G\ddot{a}_{40:\overline{10}|}$$

这就是所求总保费准备金。

6.2.2　总保费准备金对会计报表的影响

为了了解以总保费准备金作为负债对会计报表的影响，下面用一个例子来说明。

考虑一个年缴保费的 3 年期两全保险，有关情况如表 6-7 所示。

表 6-7　基本情况说明

险种	在 x 岁签订的年缴保费 3 年期两全保险
保费与保险支付方式	全离散式
死亡率	$q_x=1/10$，$q_{x+1}=1/9$，$q_{x+2}=1/8$
利率	预定年实际利率 $i=15\%$
保险金额	1000 元
费用支付时间	每个保单年度初

由此可计算年缴均衡纯保费

$$\begin{aligned}1000P_{x:\overline{3}|}&=\frac{1000A_{x:\overline{3}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{3}|}}\\&=\frac{1000(vq_x+v^2{}_{1|}q_x+v^3{}_2p_x)}{1+vp_x+v^2{}_xp_x}\\&=\frac{1000(0.1v+0.1v^2+0.8v^3)}{1+0.9v+0.8v^2}\\&=288.41(\text{元})\end{aligned}$$

各期末纯保费准备金

$$\begin{aligned}1000\,{}_0V_{x:\overline{3}|}&=1000A_{x:\overline{3}|}-1000P_{x:\overline{3}|}\ddot{a}_{x:\overline{3}|}\\&=0(\text{元})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1000\,{}_1V_{x:\overline{3}|}&=1000A_{x+1:\overline{2}|}-1000P_{x:\overline{3}|}\ddot{a}_{x+1:\overline{2}|}\\&=1000(vq_{x+1}+v^2p_{x+1})-1000P_{x:\overline{3}|}(1+vp_{x+1})\\&=257.41(\text{元})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1000\,{}_2V_{x:\overline{3}|}&=1000A_{x+2:\overline{1}|}-1000P_{x:\overline{3}|}\ddot{a}_{x+2:\overline{1}|}\\&=1000V-1000P_{x:\overline{3}|}\\&=581.16(\text{元})\end{aligned}$$

下面考虑包含费用情况。各种费用及其分配如表 6 - 8 所示。

表 6 - 8 费用附加表

费用类型	初年度		续年度	
	百分比数	固定数	百分比数	固定数
销售佣金	10%	—	2%	—
一般费用	4%	3	—	1
保费税	2%	—	2%	—
保单维持费	2%	1	2%	1
签单与分类费	2%	4	—	—
合计	20%	8	6%	2

注：这里"百分比数"指费用按保费的百分比支付的部分。

由此可以计算年缴保费

$$G\ddot{a}_{x:\overline{3}|} = 1000A_{x:\overline{3}|} + (0.2G + 8) + (0.06G + 2)a_{x:\overline{2}|}$$

$$G = \frac{1000A_{x:\overline{3}|} + 8 + 2a_{x:\overline{2}|}}{0.8 + 0.94a_{x:\overline{2}|}}$$

$$= \frac{1000(vq_x + v^2{}_{1|}q_x + v^3{}_2p_x) + 8 + 2(vp_x + v^2{}_2p_x)}{0.8 + 0.94(vp_x + v^2{}_2p_x)}$$

$$= 332.35(\text{元})$$

各期末总保费准备金

$$E[{}_0L_e] = [1000A_{x:\overline{3}|} + (0.2G + 8) + (0.06G + 2)a_{x:\overline{3}|}] - G\ddot{a}_{x:\overline{3}|}$$

$$= 0(\text{元})$$

$$E[{}_1L_e] = [1000A_{x+1:\overline{2}|} + (0.06G + 2)\ddot{a}_{x+1:\overline{2}|}] - G\ddot{a}_{x+1:\overline{2}|}$$

$$= 1000(vq_{x+1} + v^2p_{x+1}) + (0.06G + 2)(1 + vp_{x+1}) - G(1 + vp_{x+1})$$

$$= 218.41(\text{元})$$

$$E[{}_2L_e] = [1000A_{x+2:\overline{1}|} + (0.06G + 2)\ddot{a}_{x+2:\overline{1}|}] - G\ddot{a}_{x+2:\overline{1}|}$$

$$= 1000v + (0.06G + 2) - G$$

$$= 559.16(\text{元})$$

下面来比较各期末纯保费准备金与总保费准备金。

第一个保单年度初，在未收取保费之前，保险人对被保险人没有负债，这时纯保费准备金与总保费准备金都为零。

在第一个保单年度末和第二个保单年度末，总保费准备金都小于纯保费准备金。这是因为在第一个保单年度，附加保费（$G - 1000p_{x:\overline{3}|}$）= 43.94（元）不足以抵付费用（$0.2G + 8$）= 74.47（元）。这个差额到第一保单年度末的精算积累值为（74.47 - 43.94）/ vp_x = 39（元），正好是总保费准备金与纯保费准备金的差额（257.41 - 218.41）= 39（元）。保单初始年度在附加保费上的亏损将在后续年度逐年摊回，因此续年度的总保费准备金仍将小于纯保费准备金，只是差额逐年减小。

在最后一个保单年度末，当保险人履行保险义务后，其对被保险人不再有负债，此时纯保费准备金与总保费准备金都等于零。

现在根据上述保单来构造一个简单的保险模型，将有关数据列入会计报表进行比较。

假设每张保单的年缴总保费在原来 332.35 元的基础上又加上 10 元，作为保险人获得利润和防范意外灾难的附加保费，保险人有 1000 元初始基础，最初有 10 个被保人。下面的会计报表是根据这 10 个被保人组成的确定生存群体构造的，表中的各数据除以 10 便是相应于每个最初被保人的各期望值。第一种会计报表仅承认纯保费准备金为负债，第二种会计报表则将总保费准备金作为负债。

表 6-9　　收　入　表

(1) 以纯保费准备金作为负债		(2) 以总保费准备金作为负债
	第一年 收入	
3423.50	保费收入（10 人）	3423.50
548.82	投资收入（15%）	548.82
3972.32		3972.32
	收入扣除费用	
684.70	百分数（20%）	684.70
80.00	固定数（8）	80.00
1000.00	给付（1 人）	1000.00
2316.69	准备金增加数	1965.69
4081.39		3730.39
-109.07	净收入	241.93
	第二年 收入	
3081.15	保费收入（9 人）	3081.15
912.88	投资收入（15%）	912.88
3994.03		3994.03
	收入扣除费用	
184.87	百分数（6%）	184.87
18.00	固定数（2）	18.00
1000.00	给付（1 人）	1000.00
2332.59	准备金增加数	2507.59
3535.46		3710.46
458.57	净收入	283.57
	第三年 收入	
2738.80	保费收入（8 人）	2738.80
1283.59	投资收入（15%）	1283.59
4022.39		4022.39

续表

(1) 以纯保费准备金作为负债		(2) 以总保费准备金作为负债
	收入扣除费用	
164.33	百分数（6%）	164.33
16.00	固定数（2）	16.00
8000.00	给付（1人）	8000.00
-4649.28	准备金增加数	-4473.28
3531.05		3707.05
491.34	净收入	315.34

注：1. 投资收入 =（上年末资产 + 保费收入 - 费用）(0.15)

2. 总净收入 = -109.07 + 458.57 + 491.34　　(1)

= 241.93 + 283.57 + 315.34　　(2)

= 840.84

从表 6-9 可以看到，两种会计方法得出的总净收入是相同的。这是因为到保险期结束时，每人年缴保费中的 332.35 元应当平衡所有的保险给付与费用开支。保险人的总净收入完全来自 1000 元初始基金和每人年缴保费中的 10 元利润附加保费，即

$$\begin{aligned}\text{总净收入} &= \text{初始基金上的利息收入} + \text{利润附加保费的积累值}\\ &= 1000\times[(1.15)^3-1]+10\times10\times(1-20\%)\times(1.15)^3\\ &\quad +10\times9\times(1-6\%)\times(1.15)^2+10\times8\times(1-6\%)\times(1.15)\\ &= 840.91\end{aligned}$$

这两种计算结果之差来自舍入误差。但在以纯保费准备金作为负债的会计科目中，由于第一年的负债增加太大，把初始基金上的投资收入和利润附加保费的积累值抵消后还出现亏损 109.07 元。这些被抵消掉的初始基金上的投资收入和利润附加保费的积累值以及出现的亏损将在续年度摊回，这就导致续年度的净收入较大。在以总保费准备金作为负债的会计科目中，年缴总保费中用于保险给付与费用开支的部分扣除保险给付与费用开支后的积累值便是当年的负债增加数，它不影响保险人的自有资金上的投资收入和利润附加保费的积累。因此，各年度的净收入完全来自于自有资金和利润附加保险。现验证如下：

第一年的净收入 $= 1000\times(0.15)+100\times(1-0.2)\times(1.15)=242$

第二年的净收入 $=(1000+242)\times(0.15)+90\times(1-0.06)\times(1.15)=283.59$

第三年的净收入 $=(1000+242+283.59)\times(0.15)+80\times(1-0.06)\times(1.15)=315.32$

计算结果有舍入误差。

表 6-10　　资产负债表

(1) 以纯保费准备金作为负债		(2) 以总保费准备金作为负债
	第一年末	
3207.62	资产	3207.62
2316.69	负债（准备金）	1965.69
890.93	盈余	1241.93
3207.62		3207.62

续表

(1) 以纯保费准备金作为负债		(2) 以总保费准备金作为负债
	第二年末	
5998.78	资产	5998.78
4649.28	负债（准备金）	4473.28
1349.50	盈余	1525.50
5998.78		5998.78
	第三年末	
1840.84	资产	1840.84
0	负债（准备金）	0
1840.84	盈余	1840.84
1840.84		1840.84

注：1. 盈余的增加数 = 总净收入
　　1840.84 - 1000 = 840.84
　　2. 盈余 = 上年末的盈余 + 净收入
　　3. 资产 = 上年末的资产 +（净收入 + 准备金增加数）
　　　　= 上年末的资产 +（保费收入 + 投资收入 - 给付 - 费用）

现在来看看资产负债表，以总保费准备金作为负债并不影响保险人的资产，只是由于各年度末的负债比以纯保费准备金作为负债时小，所以盈余相应增大。但到保险期结束时，两者便达到一致，即等于初始基金加上总净收入。应当注意的是，以纯保费准备金作为负债时，第一年度末的盈余 890.93 元小于初始基金 1000 元。如果没有这笔初始基金作为资产，保险人将处于资不抵债的状况。但在以总保费准备金作为负债时，则不会出现这种情况，因为净收入非负，盈余不小于初始基金。

最后要说明的是，在实务中，期望的结果不像以上会计报表所假设的那样具有确定性，否则寿险经营就不存在风险了。

§ 6.3　预期盈余计算

本节将通过数学推导来分析预期盈余，使上节中的思想变得更为清晰。结合表 6-9 和表 6-10，有助于对本节讨论内容的理解。

6.3.1　不考虑费用时的情形

财务会计的目的之一是在各会计期末确定会计等式

$$A(h) = L(h) + U(h) \tag{6.3.1}$$

中的各要素。这里，$A(h)$ 表示第 h 会计期末的资产额，$L(h)$ 表示负债额，而 $U(h)$ 表示权益额（在保险会计中也称为盈余）。盈余的增量可表示为

$$\Delta U(h) = \Delta A(h) - \Delta L(h)$$

$= 第 h+1 期的净收益$ (6.3.2)

先在表 6-11 所给的理想化条件下运用数学推导来计算预期盈余。

表 6-11 会计说明表

1. 险种	终身寿险，单位保额
2. 支付方式	全离散式
3. 签单年龄与时间	年龄为 x 岁，在第一会计期初签单
4. 费用	无费用及附加保费
5. 投资经验	投资所得利率与假定利率一致

根据第四章中有关纯保费准备金的递推关系，对于第 h 保单年度，有

年初 l_{x+h-1}个人的期初准备金 ×(1+ i) - 年末 d_{x+h-1}个人的死亡给付

= 年末 l_{x+h}个人的期末准备金

即

$$l_{x+h-1}({}_{h-1}V_x + P_x)(1+i) - d_{x+h-1} = l_{x+h} \cdot {}_hV_x \quad (h=1,2,3\cdots) \tag{6.3.3}$$

如果考虑对每个最初被保险人在第 h 保单年度的预期值，则在上式两边除以最初被保险人人数 l_x，得

$$_{h-1}p_x({}_{h-1}V_x + P_x)(1+i) - {}_{h-1}p_x q_{x+h-1} = {}_hp_x\, {}_hV_x \quad (h=1,2,3\cdots) \tag{6.3.4}$$

因此，在第一会计期末（假设会计与保单年度一致），对于每个最初被保险人有

$$P_x(1+i) - q_x = p_x\, {}_1V_x$$

由于第一会计期中每个最初被保险人的预期资产增量为

$\Delta A(1)$ = 保费收人 + 利息收入 - 死亡给付

$= P_x + P_x i - q_x$

$= P_x(1+i) - q_x$

而每个最初被保险人在缴纳第一期保费之前的资产等于零，即 $A(0)=0$，所以

$A(1) = A(0) + \Delta A(0)$

$= P_x + P_x i - 1 \cdot q_x$

$= p_x \cdot {}_1V_x = L(1)$

这说明在第一会计期末预期资产与预期负债相等。

假设在第 h 会计期末有

$$A(h) = L(h)$$

由于第 $h+1$ 会计期的预期资产增量为

$\Delta A(h)$ = 保费收入 + 利息收入 - 死亡给付

$= {}_hp_x P_x + {}_hp_x({}_hV_x + P_x)i - {}_hp_x q_{x+h}$

从而有

$A(h+1) = A(h) + \Delta A(h)$

$= L(h) + \Delta A(h)$

$= {}_hp_x\, {}_hV_x + \{{}_hp_x[P_x + ({}_hV_x + P_x)i] - {}_hp_x q_{x+h}\}$

$= {}_hp_x(P_x + {}_hV_x)(1+i) - {}_hp_x q_{x+h}$

$$= {}_{h+1}p_x\,{}_{h+1}V_x = L(h+1)$$

因此，根据数学归纳法，在所有会计期末预期资产都等于预期负债；

$$A(h) = L(h),(h = 1,2,3\cdots)$$

于是

$$U(h) = A(h) - L(h) = 0 \quad (h = 1,2,3\cdots)$$

从而可得结论：在没有初始基金或利润及意外灾难附加保费的情形下，所有会计期末的预期盈余都是零。

6.3.2 考虑费用时的情形

考虑较为实际一些的情况，设表 6-11 所给的其它条件不变，而在纯保费 P_x 上附加一个正的常数 c，并设在第 h 会计期初每个生存者保单上支出的费用为 e_{h-1}，附加保费 c 中包含利润，因此 c 的精算现值可能大于 e_0，e_1，e_2，…的精算现值。

考虑附加保费和费用之后，式（6.3.4）变为

$$\begin{aligned} &{}_{h-1}p_x\{[{}_{h-1}V_x + u(h-1)] + (P_x + c) - e_{h-1}\}(1+i) - {}_{h-1}p_x q_{x+h-1} \\ &= {}_h p_x[{}_hV_x + u(h)] \quad (h = 1,2,3,\cdots) \end{aligned} \tag{6.3.5}$$

其中 $u(h)$ 表示相应于每个生存的被保险人在第 h 会计期末的目标盈余。

将式（6.3.5）减去式（6.3.4），得

$${}_{h-1}p_x[u(h-1) + (c - e_{h-1})](1+i) = {}_hp_x u(h) \quad (h = 1,2,3,\cdots) \tag{6.3.6}$$

在上式两边乘上 v^h 并移项，得

$$\Delta[v^{h-1}\,{}_{h-1}p_x u(h-1)] = v^{h-1}\,{}_{h-1}p_x(c - e_{h-1}) \tag{6.3.7}$$

结合初始条件 $u(0)=0$（即没有初始基金的情形），对上式两边求和可得

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{h}\Delta[v^{j-1}\,{}_{j-1}p_x u(j-1)] &= \sum_{j=1}^{h} v^{j-1}\,{}_{j-1}p_x(c - e_{j-1}) \\ v^h\,{}_hp_x u(h) &= \sum_{j=1}^{h} v^{j-1}\,{}_{j-1}p_x(c - e_{j-1}) \\ {}_hp_x u(h) &= \sum_{j=1}^{h}(1+i)^{h-j+1}\,{}_{j-1}p_x(c - e_{j-1}) \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

这就是说，相应于每个最初被保险人在第 h 会计期末的预期盈余是前面各会计期上对盈余的预期贡献 ${}_{j-1}p_x(c - e_{j-1})(j = 1,2,\cdots,h)$ 的积累值，读者可将这个结果与上节中总净收人的计算式加以比较。'

在上面讨论的保险模型中，如果把纯保费准备金作为负债，那么在第 h 会计期末相应于每个最初被保人的各种期望值如下表所示：

资产负债表 （第 h 会计期末）
$A(h) = L(h) + U(h)$ $= {}_hp_x \cdot {}_hV_x + {}_hp_x u(h)$ $= {}_hp_x \cdot {}_hV_x + \sum_{1}^{h}(1+j)^{h-j+1}\,{}_{j-1}p_x(c - e_{j-1})$

续表

	收入表 （第 h 会计期）	
收入		
保费收入	${}_{h-1}p_x\ (P_x+c)$	
投资收入	${}_{h-1}p_x\ [{}_{h-1}V_x+u\ (h-1)\ +P_x+c-e_{h-1}]\ i$	
总计	${}_{h-1}p_x\ \{(P_x+c)\ (1+i)\ +\ [{}_{h-1}V_x+u\ (h-1)\ -e_{h-1}]\ i\}$	
	收入扣除	
死亡给付	${}_{h-1}p_x q_{x+h-1}$	
费用	${}_{h-1}p_x e_{h-1}$	
准备金增加数	${}_hp_{x\,h}V_x-{}_{h-1}p_{x\,h-1}V_x$	
总计	${}_hp_{x\,h}V_x-{}_{h-1}p_x\ ({}_{h-1}V_x-e_{h-1})\ +{}_{h-1}p_x q_{x+h-1}$	
净收入（盈余增加数）	${}_{h-1}p_x\ [u\ (h-1)\ i+\ (c-e_{h-1})\ (1+i)]$	(6.3.9)

净收入的计算运用了公式（6.3.4），预期盈余的表示运用了公式（6.3.8）。表 6－9 和 6－10 的第一栏是上面所示的一个数字例子，只是那里用的是一个确定生存群体而非随机生存群体。

由式（6.3.9）可得在第 h 会计期末相应于每个最初被保险人的预期盈余

$$ {}_hp_xu(h)={}_{h-1}p_xu(h-1)+{}_{h-1}p_x[(u(h-1)i+(c-e_{h-1})(1+i)] \tag{6.3.10} $$

上式与式（6.3.6）是一致的，只是这里是从会计的角度推导的。

在“费用的分类与分配”中，费用的开支在保单初期很大，但会随着保单期延续而减少。这样，一般来说，对于较小的 h，预期盈余

$$ {}_hp_xu(h)=\sum_{j=1}^{h}(1+i)^{h-j+1}\ {}_{j-1}p_x(c-e_{j-1}) $$

将是负值，而对于较大的 h 将是正值。这个结果适合于以纯保费准备金作为负债，附加保费不变，而费用随保单期递减的会计模型。

为了避免在最初几个保单年度出现资产小于负债的情况，可以采用下面几种办法：

1. 保险人可以为获得初始盈余 $u(0)$ 而取得附加资本，即建立一个初始基金，以使

$$ u(0)(1+i)^h+\sum_{j=1}^{h}(1+i)^{h-j+1}\ {}_{j-1}p_x(c-e_{j-1}) $$

其中，$h=0,1,2,\cdots$均为正数。

2. 可以使附加保费随保单年度而变化，以使 $c_{h-1}-e_{h-1}\geqslant 0\ (h=1,2,3\cdots)$

3. 可以基于修正准备金原理记录保险人的负债，以减少最初几个保单年度认可的负债。表6－9 和表 6－10 中以总保费准备金作为负债的准备金制度即是一个例子。

最后一种方法将在下节进一步讨论。

§6.4　修正准备金

以总保费准备金作为负债实际上是一种修正准备金制度。在第二节的例子中，初年度附加保费开支费用的不足部分（74.47 - 43.94） = 30.53（元）由初年度支付死亡成本有余的纯保费来弥补。这样，第一年的纯保费降低到（288.41 - 30.53） = 257.88（元），用过去法求得第一年末的纯保费准备金为

$$257.88/vp_x - 1000A^{1}_{x:\overline{1}|}/vp_x = (257.88 - 1000vq_x)/vp_x = 218.40(\text{元})$$

这就等于第一年末的总保费准备金（有 0.01 的舍入误差）。相对于均衡纯保费准备金来说，这种修正纯保费准备金可以降低保险前期的负债，从而使账上盈余不至于为负数。下面先就一般情形进行讨论，然后介绍一些国家采用的法定准备金制度。

6.4.1　修正准备金的一般方法

修正准备金方法是这样一种方法，它在准备金的定义中从未来给付的精算现值中减去的不是均衡纯保费的精算现值，而是定义一系列分段纯保费，以未来给付的精算现值减去这些分段纯保费的精算现值作为准备金。通常是把纯保费分为三个不同水平，虽然理论上可以分成更多个水平。这三个纯保费水平分别表示如下：初年度纯保费记为 α；往后 $j-1$ 的纯保费记为 β；j 年之后的纯保费即为原来的均衡纯保费 P。这一系列纯保费应与原来的均衡纯保费有相同的精算现值，即

$$\alpha + \beta a_{x:\overline{j-1}|} + P_{j|}\ddot{a}_{x:\overline{h-j}|} = P\ddot{a}_{x:\overline{h}|}$$

$$\alpha + \beta a_{x:\overline{j-1}|} = P\ddot{a}_{x:\overline{j}|} \tag{6.4.1}$$

这里 h 为保费缴纳年数，前面 j 年缴费期称为修正期。

若用均衡纯保费准备金，则年缴总保费 $P+c$ 中能用于支付初年度费用的部分是 c，这往往不够支付费用。因此要减少初年度的纯保费以满足费用开支，即令 $\alpha < P$，这样便有 $P+c-\alpha > c$。在修正准备金方法中，就能获得 $P+c-\alpha$ 来支付初年度较大的费用。当 $\alpha < P$ 时，自然就有 $\beta > P$，这也可以通过改写式（6.4.1）看出。

$$\alpha + \beta a_{x:\overline{j-1}|} = P(a_{x:\overline{j-1}|} + 1)$$

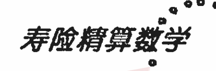
$$\beta = P + \frac{P - \alpha}{a_{x:\overline{j-1}|}} \tag{6.4.2}$$

式（6.4.1）还可写成另一种有用的形式

$$\beta(\ddot{a}_{x:\overline{j}|} - 1) = P\ddot{a}_{x:\overline{j}|} - \alpha$$

$$\beta = P + \frac{\beta - \alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{j}|}} \tag{6.4.3}$$

由此可以看出，修正准备金方法可以通过确定修正期年数，以及初年度纯保费 α、续年度纯保费 β 或两者之差 $\beta-\alpha$ 中的任一个来定义。图 6-1 说明了构成修正准备金方法的各保费之间的关系。将式（6.4.1）写成 $P-\alpha = (\beta - P)\ a_{x:\overline{j-1}|}$，图中阴影部分的面积 A 和 B 分别等于 $P-\alpha$ 和 $(\beta-P)\ a_{x:\overline{j-1}|}$。



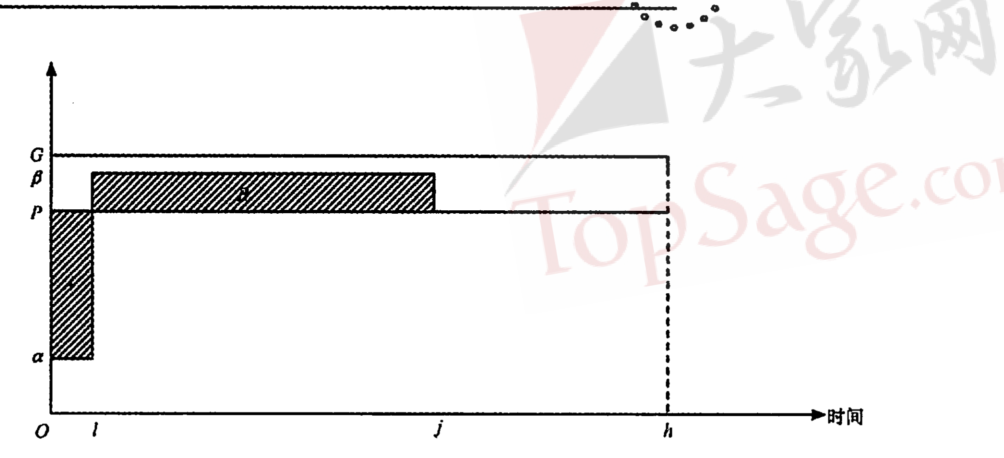


图 6-1　修正准备金方法中的各种保费

用 V^{Mod} 表示修正准备金方法中的期末准备金。对于离散型和半连续型寿险，有

$$
{}_kV^{Mod} = \begin{cases} A(k) - \beta\ddot{a}_{x+k:\overline{j-k}|} - P_{j-k|}\ddot{a}_{x+k:\overline{j-k}|} & (k < j) \\ A(k) - P\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} & (j \leqslant k < h) \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} A(k) - Pa_{x+k:\overline{h-k}|} - (\beta - P)\ddot{a}_{x+k:\overline{j-k}|} & (k < j) \\ A(k) - P\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} & (j \leqslant k < h) \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} {}_kV - (\beta - P)\ddot{a}_{x+k:\overline{j-k}|} & (k < j) \\ {}_kV & (j \leqslant k < h) \end{cases}
$$

这里，$A(k)$ 表示保险给付在 k 时刻的精算现值。由此可得，当 $\alpha < P$（从而 $\beta > P$）时，在修正期内修正准备金小于均衡纯保费准备金，而在修正期后两者归为一致。

[例 6.4.1]　对（30）签订的 1000 元保额，35 年缴费 50 年期离散式两全保险应用修正准备金方法，利用题中所给条件，计算第 8 个保单年末的修正准备金。已知：

（1）修正年限为 20 年；

（2）第 2 年至第 20 年的修正年纯保费为 9.56；

（3）$1000\,{}^{35}_{8}V_{30:\overline{50}|} = 74.42$；

（4）${}_{35}P_{30:\overline{50}|} = 0.006340$；

（5）$\ddot{a}_{38:\overline{12}|} = 8.805$；

计算 $1000\,{}^{35}_{8}V^{Mod}_{30:\overline{50}|}$。

解： 这里修正年限为 $j = 20$ 年，有

$$
\begin{aligned}
1000\,{}^{35}_{8}V^{Mod}_{30:\overline{50}|} &= 1000[{}^{35}_{8}V_{30:\overline{50}|} - (\beta - {}_{35}P_{30:\overline{50}|})\ddot{a}_{38:\overline{20-8}|}] \\
&= 74.42 - (9.56 - 1000 \times 0.006340) \times 8.805 \\
&= 46.07
\end{aligned}
$$

实际上，修正准备金方法也可以推广到全连续式寿险中。设 $\bar{\alpha}$ 和 $\bar{\beta}$ 分别表示初年度和续年度的修正年纯保费，修正期年数为 j，那么与式（6.4.1）相应的有

$$
\bar{\alpha}\bar{a}_{x:\overline{1}|} + \bar{\beta}\,{}_{1|}\bar{a}_{x:\overline{j-1}|} + \bar{P}_{j|}\bar{a}_{x:\overline{h-j}|} = \bar{P}\bar{a}_{x:\overline{h}|} \tag{6.4.4}
$$

这里 h 为保费缴纳年数，$\bar{P}$ 为原来的纯保费。

同样可以导出与式（6.4.2）相应的式子

$$
\bar{\alpha}\bar{a}_{x:\overline{1}|} + \bar{\beta}\,{}_{1|}\bar{a}_{x:\overline{j-1}|} = \bar{P}(\bar{a}_{x:\overline{1}|} + {}_{1|}\bar{a}_{x:\overline{j-1}|})
$$

$$
\bar{\beta} = \bar{P} + \frac{(\bar{P} - \bar{\alpha})\bar{a}_{x:\overline{1}|}}{{}_{1|}\bar{a}_{x:\overline{j-1}|}} \tag{6.4.5}
$$

由上式知，当 $\bar{\alpha} < \bar{P}$ 时，$\bar{\beta} > \bar{P}$。

对于连续型寿险，当 $t \geqslant 1$ 时，t 时刻的修正准备金可由未来法计算如下

$$
{}_t\bar{V}^{Mod} = \begin{cases} A(t) - \bar{\beta}\bar{a}_{x+t:\overline{j-t}|} - \bar{P}_{j-t|}\bar{a}_{x+t:\overline{j-t}|} & (t < j) \\ A(t) - \bar{P}\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}|} & (j \leqslant t < h) \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} A(t) - \bar{P}\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}|} - (\bar{\beta} - \bar{P})\bar{a}_{x+t:\overline{j-t}|} & (t < j) \\ A(t) - \bar{P}\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}|} & (j \leqslant t < h) \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} {}_t\bar{V} - (\bar{\beta} - \bar{P})\bar{a}_{x+t:\overline{j-t}|} & (t < j) \\ {}_t\bar{V} & (j \leqslant t < h) \end{cases}
$$

这里 $A(t)$表示保险给付在 t 时刻的精算现值。与全离散式寿险的情况相同，若 $\bar{\alpha} < \bar{P}$(从而 $\bar{\beta} > \bar{P}$)，在修正期内修正准备金小于均衡纯保费准备金，而在修正期后两者归为一致。

当 $t < 1$ 时，t 时刻的修正准备金按过去法计算较为简单。

$$
{}_t\bar{V}^{Mod} = \frac{\bar{\alpha}\bar{a}_{x:\overline{t}|} - \bar{A}^{\ 1}_{x:\overline{t}|}}{{}_tE_x} \quad (0 < t < 1)
$$

当 $\bar{\alpha} < \bar{P}$ 时，由

$$
{}_t\bar{V} - {}_t\bar{V}^{Mod} = \frac{\bar{P}\bar{a}_{x:\overline{t}|} - \bar{A}^{\ 1}_{x:\overline{t}|}}{{}_tE_x} - \frac{\bar{\alpha}\bar{a}_{x:\overline{t}|} - \bar{A}^{\ 1}_{x:\overline{t}|}}{{}_tE_x}
$$

$$
= (\bar{P} - \bar{\alpha})\frac{\bar{a}_{x:\overline{t}|}}{{}_tE_x}
$$

可知，修正准备金在 $t < 1$ 时也比均衡纯保费准备金小。

6.4.2 一年定期修正制

在修正准备金方法中，为了增加初年度的附加保费 $G - \alpha$，以满足初年度较大的费用开支，常要求 α 小于 P。然而在某些国家的管理规则中，α 的取值有一个实际的最低界限。这个最低界限来自这样一种考虑：负的准备金负债实际上算作资产。由于未来保费的收取是不确定的，因而在确定保险公司的偿付能力时，管理机构不允许将负准备金列入资产负债表。这时，确定修正准备金方法就要求避免在第一保单年度末出现负准备金。对于全离散式单位保额的寿险，就意味着 α 的最小可能取值为 $A^{\ 1}_{x:\overline{1}|}$，即一年定期寿险的死亡成本。这是因为

$$
{}_1V = \frac{\alpha}{{}_1E_x} - \frac{A^{\ 1}_{x:\overline{1}|}}{{}_1E_x} = (\alpha - A^{\ 1}_{x:\overline{1}|})/{}_1E_x
$$

要使${}_1V \geqslant 0$，必须 $\alpha \geqslant A^{\ 1}_{x:\overline{1}|}$。

另外，对于确定的 α，准备金的大小与修正期的长短有关。从式（6.4.2）可以看出，续年度修正纯保费 β 随修正期年数 j 的增长而减小。又由准备金的过去法计算式，在修正期内有

$$
{}_kV^{Mod} = \frac{\alpha + \beta\ddot{a}_{x:\overline{k-1}|}}{{}_kE_x} - (\text{到时刻 } k \text{ 为止保险给付的精算积累值})
$$

由于 β 随修正期年数 j 的增长而减小，而使右边第一项也随修正期增长而减小，第二项与修正期无关，由此可知，修正期越长准备金越小。

由于修正期不能长于保费缴纳期，因此，如果 α 取最低要求 $A^{\ 1}_{x:\overline{1}|}$，而以整个缴费期为修正期，那么准备金就达到了最低限。这种修正准备金方法称为一年定期全缴费期修正

法，简称 *FPT* 法。如果这种方法由法律或保险管理机构规定作为计算最低准备金的方法，则称之为一年定期修正制。在 *FPT* 法中，第一个保单年末的准备金为零。

FPT 法的续年度修正纯保费 β 可由下式确定

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{1}|}^{1} + \beta\ {}_{1|}\ddot{a}_{x:\overline{h-1}|} &= P\ddot{a}_{x:\overline{h}|} \\ &= A \\ &= A_{x:\overline{1}|}^{1} + {}_{1}E_{x}A(1) \end{aligned}$$

或

$$\beta = \frac{{}_{1}E_{x}A(1)}{{}_{1|}\ddot{a}_{x:\overline{h-1}|}} = \frac{A(1)}{\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|}} \tag{6.4.6}$$

这里 $A(1)$ 是在 $x+1$ 岁时签订的与原保险有相同的到期年龄的保险的趸缴纯保费，β 则可看作该保险的年缴纯保费，而缴费期比原保险少一年。

[例 **6.4.2**] 对 35 岁男性签订的保额为 20000 元的 30 年期全离散式两全保险，根据附录Ⅲ（CL1 非养老金业务男性表）的换算表数值，在年利率 $i=2.5\%$ 的情况下，求一年定期修正制下第三年末的准备金。

解：由式（6.4.2）有

$$\beta^{FPT} = P_{35:\overline{30}|} + \frac{P_{35:\overline{30}|} - A_{35:\overline{1}|}^{1}}{a_{35:\overline{29}|}}$$

将

$$P_{35:\overline{30}|} = \frac{M_{35} - M_{65} + D_{65}}{N_{35} - N_{65}} = 0.02355$$

$$a_{35:\overline{29}|} = \frac{N_{36} - N_{65}}{D_{35}} = 19.85884$$

$$A_{35:\overline{1}|}^{1} = \frac{M_{35} - M_{36}}{D_{35}} = 0.00103$$

代入上式，求得 $\beta^{FPT}=0.02468$。所求准备金为

$$\begin{aligned} {}_{3}V_{35:\overline{30}|}^{FPT} &= 20000A_{38:\overline{27}|} - 20000\beta^{FPT}\ddot{a}_{38:\overline{27}|} \\ &= 20000\left[\frac{M_{38} - M_{65} + D_{65}}{D_{38}} - \beta^{FPT}\frac{N_{38} - N_{65}}{D_{38}}\right] \\ &= 20000(0.52735 - 0.02468 \times 19.37874) \\ &= 981.65(元) \end{aligned}$$

对于连续型寿险，一年定期修正制中初年度纯保费 $\bar{\alpha}$ 由下式确定

$${}_{1}\bar{V}^{FPT} = 0$$

即

$$\frac{\bar{\alpha}\bar{a}_{x:\overline{1}|}}{{}_{1}E_{x}} - \frac{\bar{A}_{x:\overline{1}|}^{1}}{{}_{1}E_{x}} = 0$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{A}_{x:\overline{1}|}^{1}}{\bar{a}_{x:\overline{1}|}}$$

续年度修正纯保费 $\bar{\beta}$ 则由下式计算

$$\bar{A}_{x:\overline{1}|}^{1} + \bar{\beta}\ {}_{1|}\bar{a}_{x:\overline{h-1}|} = \bar{P}(\bar{A})\bar{a}_{x:\overline{h}|} = \bar{A}$$

$$= A_{x:\overline{1}|}^{1} + {}_1E_x\bar{A}(1)$$

或

$$\bar{\beta} = \frac{{}_1E_x\bar{A}(1)}{{}_{1|}\ddot{a}_{x:\overline{h-1}|}} = \frac{\bar{A}(1)}{\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|}} \tag{6.4.7}$$

最后看看 *FPT* 法对第一个保单年度盈余的影响。

在均衡纯保费准备金方法（简称 *NLP* 法）中，年缴总保费可以表示为

$$G = P + c$$

这里，c 为各年度的附加保费。在 *FPT* 法中，修正期内各年度总保费可以表示为

$$G = A_{x:\overline{1}|}^{1} + c_0 = \beta + c_1$$

这里 c_0 为初年度的附加保费，c_1 为续年度的附加保费。在初年度，由以上两式可得

$$c_0 = c + (P - A_{x:\overline{1}|}^{1})$$

这就是说，相对于 *NLP* 法，*FPT* 法在初年度提供了一个费用补贴（$P - A_{x:\overline{1}|}^{1}$）。

假设没有初始基金，即 $u(0)=0$，根据式（6.3.6），在 *NLP* 法下有

$$(c - e_0)(1 + i) = p_x u(1)$$

通常因为 $c < e_0$ 而使 $u(1)<0$。在 *FPT* 法下有

$$[(c + (P - A_{x:\overline{1}|}^{1}) - e_0](1 + i) = p_x u(1)$$

如果加上费用补贴的所得 $c_0 = c + (P - A_{x:\overline{1}|}^{1}) \geqslant e_0$，则第一年度的盈余非负。如果仍然 $c_0 < e_0$，则保险人需要采取其他措施来解决资不抵债的问题，比如，设置初始基金，即让 $u(0)>0$，或提高初年度保费。前者对于新业务占很大比重的成长性的寿险公司来说会有困难，后者则受市场竞争的限制。

基于以上这种情况，有些国家的准备金标准比一年定期修正制更低。这种更低的标准主要反映在初年度费用补贴 $P-\alpha$ 可以比 $P - A_{x:\overline{1}|}^{1}$更大，而计算原理是相同的。例如，加拿大保险法规定，保单初年度的费用补贴 $E^{Can} = P - \alpha^{Can}$最多可以取以下三者中的最小者：（1）均衡纯保费的 1.5 倍；（2）获得该业务实际发生的费用；（3）在保证能支付管理费用和保单红利的前提下，可以从各续年度摊回的费用的精算现值。依照这一标准，初年度费用补贴 E^{Can}可能高于均衡纯保费 P，从而使修正后的初年度纯保费 $\alpha^{Can} = P - E^{Can} < 0$。这时第一个保单年度的期初准备金${}_0V^{Can} + \alpha^{Can} = \alpha^{Can} < 0$，由此也使得第一个保单年度的期末准备金${}_1V^{Can} = [({}_0V^{Can} + \alpha^{Can})(1+i) - q_x]/p_x < 0$。因此，实际上加拿大保险法承认负准备金为资产的一部分。

[例 6.4.3] 在例 6.4.2 中，设初年度费用补贴为均衡纯保费的 1.5 倍，求第三年末的准备金。

解：这时续年度纯保费为

$$\beta = P_{35:\overline{30}|} + \frac{1.5P_{35:\overline{30}|}}{a_{35:\overline{29}|}} = 0.02533(\text{元})$$

所求准备金为

$$\begin{aligned}{}_3V_{35:\overline{30}|}^{Mod} &= 20000A_{38:\overline{27}|} - 20000\beta\ddot{a}_{38:\overline{27}|} \\ &= 20000(0.52735 - 0.02533 \times 19.37874) \\ &= 729.73(\text{元})\end{aligned}$$

［例 6.4.4］ 已知 $i=0.06$，$\ddot{a}_{52}=12.88785$，$A^{1}_{51:\overline{1}|}=0.00606$，计算 $1000\,{}_2V^{FPT}_{50}$。

解：由于对于（50）购买的终身寿险，其修正续年保费 $\beta^{FPT}=P_{51}$，故应用未来法公式，所求的准备金为

$$
\begin{aligned}
1000\,{}_2V^{FPT}_{50} &= 1000\cdot(A_{52}-P_{51}\cdot\ddot{a}_{52})\\
&= 1000\,{}_1V_{51}\\
&= 1000\cdot\left(1-\frac{\ddot{a}_{52}}{\ddot{a}_{51}}\right)
\end{aligned}
$$

又由于

$$A^{1}_{51:\overline{1}|}=vq_{51}=0.00606$$

$$\ddot{a}_{51}=1+vp_{51}\ddot{a}_{52}=1+(v-vq_{51})\ddot{a}_{52}=13.080249$$

所以

$$
\begin{aligned}
1000\,{}_2V^{FPT}_{50} &= 1000\cdot\left(1-\frac{\ddot{a}_{52}}{\ddot{a}_{51}}\right)\\
&= 1000\cdot\left(1-\frac{12.88785}{13.080249}\right)\\
&= 14.71
\end{aligned}
$$

6.4.3 保单分类修正制

在 FPT 法中，初年度的费用（$P-A^{1}_{x:\overline{1}|}$）会因不同的险种而在数量上有很大的差别。例如 $P_{x:\overline{n}|}$通常比 $P^{1}_{x:\overline{n}|}$大得多，所以 n 年两全保险较 n 年定期寿险有大得多的初年度费用补贴。于是就有这样一种想法，如果 FPT 法为低保费保单提供的费用补贴足以支付初年度费用，那么对于高保费保单，这种费用补贴就有余。基于这种想法，对低保费保单可以使用 FPT 法，对高保费保单则须缩减初年度费用补贴以提供一个正的初年度期末准备金。这种根据保费的高低来划分保单，对高保费保单和低保费保单规定不同的修正准备金方法的制度，称为保单分类修正制。

制定一种保单分类修正制需要考虑两个问题：高保费保单与低保费保单的划分标准；对高保费保单初年度费用补贴（或等价的对初年度纯保费或续年度修正纯保费或两者之差）和修正期的规定。

在 FPT 法中，第一年度的纯保费 $\alpha=A^{1}_{x:\overline{1}|}$实际上是该年度的自然保费，刚好承担该年的死亡给付，使年末准备金等于零。这对于死亡保险有其合理性。但对于两全保险，纯保费中有相当大一部分是用于生存给付的，这部分不宜完全用于补贴费用，而应该积存到年末，提供一个正的准备金。由于生命表极限年龄的限制，终身寿险既是期限最长的定期寿险，又是期限最长的两全保险，从而既是最贵的定期寿险，又是最便宜的两全保险。因此，在保单分类制中，常用终身寿险作为高、低保费保单的划分标准。但由于年费率与缴费期长短有关，所以还需确定这个标准寿险的缴费期限。此外，有关初年度的费用补贴也可用这个标准寿险的初年度费用补贴来确定。

下面介绍美国标准估值法为人寿保险定义的保险监督官估值标准。这个标准的要点如下：

1. 满足 $\beta^{FPT}>{}_{19}P_{x+1}$的保单为高保费保单，这里 β^{FPT}为该寿险按 20 年缴费使用 FPT

法时的续年度纯保费。

2. FPT 法为提存低保费保单准备金的最低要求；

3. 对于高保费保单，使用一个特定的保险监督官准备金计算法（简记为 Com），这个方法中规定保费缴纳期为修正期，以及 $\beta^{Com}-\alpha^{Com}={}_{19}P_{x+1}-A^{1}_{x:\overline{1}|}$。

美国保险监督官估值标准是以 20 年缴费的终身寿险为划分标准的。高保费保单的初年度费用补贴即等于这个标准寿险在 FPT 法中的初年度费用补贴，因为 ${}_{19}P_{x+1}$ 为 20 年缴费终身寿险在 FPT 法中的续年度修正纯保费，这里的初年度费用补贴是指续年度修正纯保费与初年度纯保费之差。

由式（6.4.3），高保费保单的续年度修正纯保费可以表示为

$$\beta^{Com} = P + \frac{{}_{19}P_{x+1} - A^{1}_{x:\overline{1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \tag{6.4.8}$$

这里 h 为保费缴纳期年数。

[例 6.4.5] 试根据美国保险监督官估值标准计算例 6.4.2 中的保单在第三年末的准备金。

解： 因为

$$\beta^{FPT} = 0.02463 > {}_{19}P_{36} = \frac{M_{36}}{N_{36}-N_{55}} = 0.02317$$

所以该保单属于高保费保单，其续年度纯保费由式（6.4.8）确定

$$\begin{aligned}\beta^{Com} &= P_{35:\overline{30}|} + \frac{{}_{19}P_{36} - A^{1}_{35:\overline{1}|}}{\ddot{a}_{35:\overline{30}|}} \\ &= 0.02355 + (0.02317 - 0.00103)/(1 + 19.85884) \\ &= 0.02461\end{aligned}$$

所求准备金为：

$$\begin{aligned}{}_{3}V^{Com}_{35:\overline{30}|} &= 20000A_{38:\overline{27}|} - 20000\beta^{Com}\ddot{a}_{38:\overline{27}|} \\ &= 20000(0.52735 - 0.02461 \times 19.37874) \\ &= 1008.78\end{aligned}$$

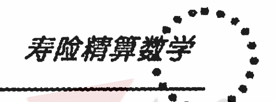
美国保险监管部门如何对非均衡缴费和非均衡保额的保单执行这一估值标准值得学习和借鉴。下面来考虑一般情形：当被保险人在第 $j+1$ 保单年度内死亡时，在该保单年度末给付保险金 b_{j+1}；生存的被保险人在保费缴纳期内的第 $j+1$ 保单年度（即时刻 j）缴纳总保费 G_j。为了明确起见，下面就 n 年定期寿险给出计算公式，并对其与 n 年两全保险的不同之处作出相应的说明。

首先要确定高保费保单和低保费保单的划分标准。为此，需要计算一个均衡的续年度保额，使其与原来的非均衡续年度保额有相同的精算现值。这个等价的续年度均衡保额记为 $ELRA$（Equivalent Level Renewal Amount），那么应有

$$ELRA \cdot A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|} = \sum_{j=0}^{n-2} b_{j+2}v^{j+1}\,{}_{j}p_{x+1}\,q_{x+1+j}$$

所以

$$ELRA = \frac{\sum_{j=0}^{n-2} b_{j+2}v^{j+1}\,{}_{j}p_{x+1}\,q_{x+1+j}}{A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|}} \tag{6.4.9}$$



这里的续年度均衡保额只考虑死亡给付额，因此对于两全保险，相应的 *ELRA* 也由式(6.4.9) 给出。

另外，还需计算续年度纯保费与续年度总保费的平均比，记为 r_F。这个平均比计算如下

$$r_F = \frac{\sum_{j=0}^{n-2} b_{j+2} v^{j+1} {}_jp_{x+1} q_{x+1+j}}{\sum_{j=0}^{h-2} G_{j+1} v^j {}_jp_{x+1}} \tag{6.4.10}$$

对于两全保险，在式 (6.4.10) 的分子中加上生存给付的精算现值即得相应的 r_F。

类似于均衡缴费和均衡保额之情形，这里则以保额为 *ELRA* 的 20 年缴费终身寿险为划分标准。如果

$$r_F \cdot G_0 \leqslant ELRA \cdot {}_{19}P_{x+1} \tag{6.4.11}$$

则该保单属于低保费保单，可以用 *FPT* 法提存准备金。此时初年度的纯保费为 $\pi_0 = vb_1q_x = b_1A^1_{x:\overline{1|}}$，续年度的纯保费为 $\pi_0 = r_F \cdot G_j(j = 1,2,\cdots,h-1$，这里 h 为保费缴纳期)。由式 (6.4.10) 可知，续年度的纯保费也恰好支付续年度的保险给付，即

$$\sum_{j=0}^{h-2} r_F G_{j+1} v^j {}_jp_{x+1} = \sum_{j=0}^{n-2} b_{j+2} v^{j+1} {}_jp_{x+1} \cdot q_{x+1+j}$$

对于 $1 \leqslant k < h$，修正准备金为

$${}_kV^{Mod} = \sum_{j=0}^{n-k-1} b_{k+j+1} v^{j+1} {}_jp_{x+k} q_{x+k+j} - r_F \sum_{j=0}^{h-k-1} G_{k+j} v^j {}_jp_{x+k} \tag{6.4.12}$$

对于两全保险，上式右边第一个等式需加上生存给付的精算现值。

如果

$$r_F \cdot G_0 > ELRA \cdot {}_{19}P_{x+1}$$

则该保单为高保费保单，其初年度较续年度多出的费用补贴不得超过

$$ELRA \cdot {}_{19}P_{x+1} - b_1A^1_{x:\overline{1|}}$$

这类似于均衡缴费情形下对 $\beta - \alpha$ 的限制。这时需要计算一个纯保费与总保费的修正平均比 r_C，由此确定的初年度纯保费 $r_CG_0 - [ELRA \cdot {}_{19}P_{x+1} - b_1A^1_{x:\overline{1|}}]$ 与续年度纯保费 $r_CG_j(j = 1,2,\cdots,h-1)$，其精算现值应当与保险给付的精算现值相等，即

$$r_CG_0 - [ELRA \cdot {}_{19}P_{x+1} - b_1A^1_{x:\overline{1|}}] + \sum_{j=1}^{h-1} r_C G_j v^j {}_jp_x = \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} v^{j+1} {}_jp_x q_{x+j}$$

因此

$$r_C = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} v^{j+1} {}_jp_x q_{x+j} + [ELRA \cdot {}_{19}P_{x+1} - b_1A^1_{x:\overline{1|}}]}{\sum_{j=1}^{h-1} G_j v^j {}_jp_x} \tag{6.4.13}$$

这时，在 $1 \leqslant k < h$ 时的修正准备金为

$${}_kV^{Mod} = \sum_{j=0}^{n-k-1} b_{k+j+1} v^{j+1} {}_jp_{x+k} q_{x+k+j} - r_C \sum_{j=0}^{h-k-1} G_{k+j} v^j {}_jp_{x+k} \tag{6.4.14}$$

对于两全保险，只需分别在式 (6.4.13) 的分子和式 (6.4.14) 的第一个求和式中加上生存给付的精算现值即可。

[例 6.4.6] 一份在 35 岁签订的男性 30 年两全保险，前 20 年死亡给付额为 150000 元，后 10 年死亡及满期给付额均为 100000 元；前 10 年年缴保费为 2500 元，以后各年为 1250 元。利用附录Ⅲ(CL1 非养老金业务男性表)中的换算函数表及利率 $i=0.025$，根据美国保险监督官估值标准计算其各年度的纯保费。

解：利用续年度死亡给付额计算 $ELRA$ 如下

$$ELRA = 50000\frac{3M_{36}-M_{55}-2M_{65}}{M_{36}-M_{65}} = 123340.47$$

续年度纯保费与续年度总保费的平均比为

$$r_F = \frac{50000(3M_{36}-M_{55}-2M_{65}+2D_{65})}{1250(2N_{36}-N_{45}-N_{65})} = 1.4565714$$

而

$$_{19}P_{36} = \frac{M_{36}}{N_{36}-N_{55}} = 0.02317$$

因为

$$r_F G_0 = 3641.43 > ELRA \cdot {}_{19}P_{36} = 2857.80$$

所以不能用 FPT 法提存准备金。这时初年度较续年度多出的费用补贴可定为

$$ELRA \cdot {}_{19}P_{36} - 150000A^1_{35:\overline{1}|} = 2703.30$$

而纯保费与总保费的修正平均比为

$$r_C = \frac{50000(3M_{35}-M_{55}-2M_{65}+2D_{65})+2703.30D_{65}}{1250(2N_{35}-N_{45}-N_{65})} = 1.4895338$$

于是，初年度的纯保费为

$$r_C(2500) - [ELRA \cdot {}_{19}P_{36} - 150000A^1_{35:\overline{1}|}] = 1020.53(\text{元})$$

第 2 年至第 10 年的纯保费为

$$r_C(2500) = 3723.83(\text{元})$$

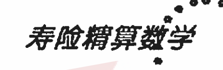
第 11 年至第 30 年的纯保费为

$$r_C(1250) = 1861.92(\text{元})$$

实际上，采用保单分类法的修正制还有伊利诺修正制，欧海欧修正制以及台湾标准式，这几种修正制实质上都是属于保单分类修正制，都是以某种限期缴费的终身寿险保单作为划分标准，分别采用不同的修正方法。由于这几种修正制应用范围比较小，在这里就不一一叙述了。

习 题 六

1. 在 40 岁签订的保额 1000 元的两全保险保单，保险期限为 65 岁。根据以下假设，写出年缴总保费计算式：



(1) 销售佣金是初年度保费的 40%；

(2) 续年度佣金为第 2 保单年度至第 10 保单年度各年保费的 5%；

(3) 保费收入税为各年保费的 2%；

(4) 保单维持费用初年度为 1000 元保额 12.50 元，续年度为 1000 元保额 4.00 元；

(5) 保险金在死亡后立即给付，无理赔费用；

(6) 使用 15 年选择与终极生命表。

2. n 年趸缴保费的两全保险的总保费由以下假设确定：

(1) 税为保费的 2.5%；

(2) 佣金为保费的 4%；

(3) 其他费用初年度为 1000 元保额 5 元，各续年度为 1000 元保额 2.50 元。

若保险金在死亡后立即给付，费用发生在保单年度初，对被保险人 (x) 签订的 1000 元保额的该种保单，求其总保费计算公式。

3. 关于 (x) 的某趸缴保费保险，其死亡受益在死亡年末给付。

已知

(i) $A_x = 0.25$

(ii) $d = 0.05$

(iii) 佣金额为总保费的 18%

(iv) 税收额为总保费的 2%

(v) 每份保单的费用，第一年内 40，第二年起每年 5

试用保单费附加法计算保单费。

4. 对 (30) 签订的保额 20000 元的半连续式终身寿险，各保单年初支付的费用如下表：

	初年度	续年度
保费百分数 (%)	50	5
每 1000 元保额 (元)	2.00	0.10
每张保单 (元)	20.00	5.00

根据附录中换算函数表计算每年应付的保单费。

5. 对 (x) 签订的保额 25000 元的半连续式 20 年期两全保险，各年初的费用分配如下表：

	百分数 (%)	每 1000 元保额 (元)	每份保单 (元)
初年度	25	2.00	15.00
续年度	5	0.50	3.00

给出 $\bar{A}_{x:\overline{20}|} = 0.4058$，$\ddot{a}_{x:\overline{20}|} = 12.522$，根据精算等价原理计算：

(1) 初年度总保费，设初年度保单费用由初年度保单费开支；

(2) 续年度总保费，设续年度保单费用由续年度保单费开支；

(3) 均衡年缴总保费。

6. 个人保单上签订的保额可看作一个随机变量。对某种保险计划，保额分布的概率密度函数为

$$f(b) = kb^{-3}(b > 10)$$

这里 b 以千元为单位。设 $a=25$，$f=0.15$ 和 $c=12$，保单按保额分为三级：10000 元~19999 元，20000 元~49999 元及 50000 元以上。求分级费率。

7. 一种离散型终身寿险保单每年初费用的分配如下；

费用类型	费　用
按保费百分比支付的	25%
按每 1000 元保额支付的	2.00（元）
保单费用	30.00（元）

设这种保单的保额均值为 2000 元，求保额为 25000 元的保单按保额均值计算的费率和按保单费附加法计算的费率所得出的年缴总保费之差。

8. 单位保额的离散型终身寿险保单的年缴保费的计算基于下列费用：

(1) 初始费用 e_0；

(2) 包含初年度的各保单年度费用 $e_1 + e_2 p_x$；

(3) 与保险金同时支付的理赔费用，每单位保额为 e_3。

若 $G = aP_x + c$，确定 a 和 c。

9. 对于连续型终身寿险模型，包含费用的损失变量可以表示为

$$L_e = L + X$$

其中

$$L = v^T - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{T|}}$$

$$X = c_0 + (g - e)\bar{a}_{\overline{T|}}$$

在这些表达式中，L 可看作相应于保险给付部分的损失变量，X 则看作相应于费用损失部分的损失变量，符号 c_0 表示初始费用，g 为每年按连续方式缴纳的维持费用，而 e 为每年的附加保费。应用等价原理 $E[L]=E[X]=0$，证明：

(1) $X = c_0 L$；

(2) $Var[L_e] = (1 + c_0)^2 Var[L]$。

10. 对于保额 1000 元的 3 年期全离散式两全保险，给出：

k	${}_kp_x$	q_{x+k}	G	e_k	$1000\,{}_kV$	$u(k)$
0	1.00	—	350	—	0	—
1	0.90	0.10	350	5	250	100
2	0.81	—	350	5	600	—

设年利率 $i=0.15$，100 张这样的保单在同一天签订，求这些保单在第 2 保单年度的期望净收入。

11. 对 30 岁女性签订的 50000 元保额 35 年缴费 50 年期全离散式两全保险，利用附录Ⅲ（CL2 非养老金业务女性表）的换算表数值，在年利率 $i=2.5\%$ 的情况下，计算第 8 个

保单年末的修正准备金。假设：

(1) 修正期为 20 年；

(2) 续年度修正纯保费为 833.80 元。

12. 若保费修正期等于保费缴纳期，试证明：

$$ {}_kV^{Mod}_{x:\overline{n}|} = 1 - (\beta + d)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} $$

这里 $d = \frac{1}{1+i}$。

13. 假设全连续式终身寿险的一种修正准备金方法由下式定义

$$ \bar{a}(t) = \frac{t}{m}\bar{\beta}(0 \leqslant t < m) $$

这里 $\bar{\beta}$ 是当 $t \geqslant m$ 时的均衡纯保费。

(1) 写出 $\bar{\beta}$ 的计算式；

(2) 写出计算 ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{Mod}$ 未来法公式，这里 $t < m$。

14. 对全离散式终身寿险，计算其修正准备方法中的 α_x^{Mod} 和 β_x^{Mod}，这里 ${}_1V_x^{Mod} = K$，修正期等于保费缴纳期。

15. 在一种关于全连续式终身寿险的修正准备金方法中，均衡年缴纯保费 P_x 在前 n 年换成年缴纯保费 α_x^{Mod}，往后换成 β_x^{Mod}（仅用于计算准备金）。证明：

$$ \frac{\beta_x^{Mod} - p_x}{p_x - \alpha_x^{Mod}} = \frac{\ddot{a}_x}{{}_{n|}\ddot{a}_x} - 1 $$

16. 证明：

$$ {}_kV - {}_kV^{Mod} = \left(\frac{\beta - a}{\ddot{a}_{x:\overline{j}|}}\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{j-k}|} $$

这里 j 是修正期年数。这个差可以看作初年度费用补贴尚未摊回的部分。

17. 对 (x) 签订的单位保额 10 年两全保险，已知：

(1) ${}_5V^{FPT}_{x:\overline{10}|} = 0.25$；(2) $\beta^{FPT} = 0.05$；(3) $d = 0.06$，$q_{x+4} = 0.01$。求 $1000\,{}_3V_{x+1:\overline{9}|}$。

18. 某分类修正准备金方法定义如下。

(1) 保单分成两类：类型 I 在 FPT 法下的续年度纯保费大于 ${}_{19}P_{x+1}$；类型Ⅱ包含所有不属于类型 I 的保单。

(2) 类型 I 中的保单，初年度纯保费与美国保险监督官标准下的相同；续年度纯保费应使准备金在保费缴纳期与 15 年相比较短的期限未达到均衡纯保费准备金。

(3) 类型Ⅱ中的保单使用 FPT 法。

对为 (x) 签订的 20 年全离散式两全保险，写出 α 和 β 在这个标准下的计算公式。

19. 一个两年定期修正法的定义中涉及三个纯保费：初年度纯保费：$A^1_{x:\overline{1}|}$；第二年度纯保费：$A^1_{x+1:\overline{1}|}$；以后各年度纯保费：P_{x+2}

在这种方法中，证明关于 (x) 的终身寿险保单的准备金为

${}_1V^{Mod} = {}_2V^{Mod} = 0$

${}_kV_x^{Mod} = {}_kV_x - (P_{x+2} - P_x)\ddot{a}_{x+k} \qquad (k = 3,4,5,\cdots)$

20. 已知 $a_{80:\overline{19}|} = 6.158$，$a_{70:\overline{30}|} = 9.339$，$a_{71:\overline{29}|} = 9.020$，$a_{70:\overline{29}|} = 9.326$，计算 $1000\,{}_{10}V^{FPT}_{70:\overline{30}|}$

21. 某种修正准备金方法规定：$\alpha \geqslant A^1_{x:\overline{1}|}$，$\beta-\alpha \leqslant 0.05$，修正期为整个保费缴纳期。这一规定使得对某些保单和某些年龄可以使用 *FPT* 法。已知 $d=0.03$，$\ddot{a}_x=17$，$\ddot{a}_{x:\overline{12}|}=9$，$A^1_{x:\overline{12}|}=\dfrac{2}{3}$及 $A^1_{x:\overline{1}|}=0.01$

(1) 对在 x 岁时签订的终身寿险保单，计算 β；

(2) 在这种方法下计算${}_{12}V_x^{Mod}$；

(3) 假设 $\alpha=\bar{A}^1_{x:\overline{1}|}=0.01$，对在 x 岁时签订的 12 年两全保险计算 β 的检验值，通过 $\beta-\alpha>0.05$，说明在这个方法下对该保险不能取 $\alpha=A^1_{x:\overline{1}|}=0.01$；

(4) 根据 (3) 中的结果，对在 x 岁签订的 12 年两全保险求最大的 β 和最小的 α 值；

(5) 计算${}_1V^{Mod}_{x:\overline{12}|}$。

22. 对 (x) 签订的 15 年全离散式两全保险，试按美国保险监督官标准写出其初年度和续年度修正纯保费计算公式。

23. 根据保险监督官修正制计算投保年龄 35 岁的一份特殊 30 年期两全保险的第一年净年缴保费。该保单起初 20 年受益金为 150000，以后为 100000，期满受益全额亦为 100000。毛保费前 10 年为 2500，以后为 1250，并设 $i=0.06$，并给出下列生命表函数值：

年龄 x	D_x	M	N
36	11539.70	12.2997	—
45	—	—	93953.92
55	3505.37	29.6319	—
65	1706.64	34.3265	—

24. 关于 (x) 的某特殊的 25 年期两全保险，如死亡发生在前 5 年，保额为 1000；如死亡发生在后 20 年，保额为 2000；如 (x) 生存 25 年，则保额为 3000。死亡受益全在年末给付。后 20 年内总保费是前 5 年总保费的 2 倍。准备金采用美国保险监督官制。

已知如下条件

$$\ddot{a}_{x:\overline{25}|}=20,\ddot{a}_{x:\overline{5}|}=4,A_{x:\overline{25}|}=0.25,A^1_{x:\overline{25}|}=0.05$$
$$A^1_{x:\overline{5}|}=0.059,A^1_{x:\overline{1}|}=0.001,{}_{19}P_{x+1}=0.02$$

计算 *ELRA*

25. 对为 (x) 签订的全离散式寿险，如果 $\beta^{FPT}>{}_{19}P_{x+1}$，那么美国保险监督官标准下的第 k 年期末准备金可以写成

$${}_kV^{Com}=\frac{A^1_{x:\overline{1}|}}{{}_kE_x}+{}_{19}P_{x+1}\ddot{s}_{x+1:\overline{k-1}|}+T\ddot{s}_{x:\overline{k}|}-\frac{A^1_{x:\overline{k}|}}{{}_kE_x}$$

求 T 的表达式。

26. 利用下述方法再计算表 5.2.3 中第 (2) 栏的净收入：

净收入 = 盈余上的利息 + 利润附加保费及其利息

比较上述净收入的计算式与相应的 (6.3.9) 式，并说明这两种方法的区别。

第七章

多元生命函数

本章主要内容：本章把建立在单个生命未来生存时间这一随机变量上的精算理论推广到多个生命的情形，但主要是讨论两个生命的状态，而对于更多生命的一般情形不作探讨。本章除了讨论在独立性假设下个体的联合生存状态和最后生存状态的相关精算变量及关系外，还进一步探讨了在非独立情形下的分布规律，并引入了两个寿险生命参数模型：Frank's Copula 模型和 Common Shock 模型。

本章主要词汇：联合生存、最后生存、趸缴保费、死亡率假设、死亡顺序

§7.1　基本概念

我们把若干个生命的组合称为一个状态，并根据其中各生命的生存与死亡情况定义状态的存续与终止。例如，我们可以把某 l 个人都活着时作为一个状态存续。也可规定状态的存续为其中至少有一人活着，即所有人死亡时状态才终止。对存续和终止的不同定义，会得出不同的状态，该生命的生存即为状态的存续，死亡即为状态的终止。

以下讨论两个生命的情形。两个生命组成的状态有两种，给出定义如下：

1. 一个 x 岁的生命 (x) 和一个 y 岁的生命 (y) 组成的状态称为联合生存状态，如果当且仅当这两个生命都生存时状态存续，则这个状态记为 (xy)；

2. 一个 x 岁的生命 (x) 和一个 y 岁的生命 (y) 组成的状态称为最后生存状态，如果这两个生命中至少有一个生存时状态存续，则这个状态记为 $(\overline{xy})$。

这两种状态分别对应两个人的联合生命保险和最后生存者保险，下面将作详细讨论。

虽然联合生存状态和最后生存状态可以推广到包含 l 个人的一般情形，但有关计算相当复杂，在寿险实务中也少有应用，因此本章不作讨论。

§7.2 连续型未来存续时间的概率分布

一个状态从组成到终止将经过的时间称为其未来存续时间。在前面各章中我们已看到，人寿保险和生存年金的各种纯保费及责任准备金都是单个生命未来生存时间 T 的某函数的数学期望。事实上，包含多个生命的情形也是如此，状态未来存续时间是最基本的随机变量。所以，我们要从这些随机变量的概率分布着手研究。

下面用到的有关状态 (xy) 和 $(\overline{xy})$ 的一些符号和概念，均与前面各章中关于状态 (x) 的符号和概念相对应，故不再一一说明。

7.2.1 联合生存状态未来存续时间的概率分布

(xy) 的未来存续时间记为 T 或 $T(xy)$。显然，$T=\min[T(x), T(y)]$，其中 $T(x)$ 和 $T(y)$ 分别为 (x)、(y) 的未来生存时间。

现在研究 T 的分布。对于 $t>0$，T 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_T(t) &= Pr(T\leqslant t)\\ &= 1-Pr(T>t)\\ &= 1-Pr[(T(x)>t \text{ 且 } T(y)>t] \end{aligned}\tag{7.2.1}$$

若 $T(x)$ 和 $T(y)$ 相互独立，则

$$\begin{aligned}F_T(t) &= 1-Pr[T(x)>t]\cdot Pr[T(y)>t]\\ &= 1-{}_tp_x\cdot{}_tp_y\end{aligned}\tag{7.2.2}$$

此时有

$$\begin{aligned}{}_tp_{xy} &= Pr(T>t)\\ &= {}_tp_x\cdot{}_tp_y\end{aligned}\tag{7.2.3}$$

而 T 的密度函数则是

$$\begin{aligned}f_T(t) &= \frac{d}{dt}(1-{}_tp_x\cdot{}_tp_y)\\ &= -{}_tp_x(-{}_tp_y\cdot\mu_{y+t})-{}_tp_y(-{}_tp_x\cdot\mu_{x+t})\\ &= {}_tp_x\cdot{}_tp_y(\mu_{x+t}+\mu_{y+t})\end{aligned}\tag{7.2.4}$$

类似于单个生命的情形，也可以从状态 (xy) 的终止力来确定 T 的分布。状态 (xy) 在时刻 t 的终止力定义为

$$\mu_{xy}(t)=\frac{f_{T(xy)}(t)}{1-F_{T(xy)}(t)}\tag{7.2.5}$$

这个定义类似于单个生命死亡力 μ_x 的定义。

在 $T(x)$ 与 $T(y)$ 相互独立时，有：

$$\mu_{xy}(t)=\frac{{}_tp_x{}_tp_y(\mu_{x+t}+\mu_{y+t})}{1-(1-{}_tp_x{}_tp_y)}$$

$$= \mu_{x+t} + \mu_{y+t} \tag{7.2.6}$$

当 μ_{xy}（t）已知时，式（7.2.5）便是关于 $F_{T(xy)}$（t）的一个一阶微分方程，不难解出 $F_{T(xy)}$（t）。因此由状态的终止力可以确定其未来存续时间分布。实际上 μ_{xy}（t）可看作已知（xy）存续到时刻 t 的条件密度函数在 t 的值。

对于状态（xy），我们把

$$\mathring{e}_{xy} = E[T(xy)] = \int_0^\infty t\ {}_tp_{xy}\mu_{xy}(t)dt$$

称为完全平均余命。类似于第一章中对 $\mathring{e}_x$ 的简化计算，可得

$$\mathring{e}_{xy} = \int_0^\infty {}_tp_{xy}dt \tag{7.2.7}$$

对于 T（xy）的方差，亦类似地有

$$Var[T(xy)] = 2\int_0^\infty t\ {}_tp_{xy}dt - (\mathring{e}_{xy})^2$$

［例 7.2.1］ 已知（x）的生存函数为

$$s(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{110} & (0 \leqslant x < 110) \\ 0 & (x \geqslant 110) \end{cases}$$

设（45）与（50）的未来生存时间相互独立，求状态（45:50）的完全平均余命。

解：

$$\begin{aligned} \mathring{e}_{45:50} &= \int_0^\infty {}_tp_{45:50}dt \\ &= \int_0^\infty {}_tp_{45} \cdot {}_tp_{50}dt \\ &= \int_0^\infty \frac{s(45+t)}{s(45)} \cdot \frac{s(50+t)}{s(50)}dt \\ &= \int_0^{60} \left[\frac{1-\dfrac{(45+t)}{110}}{1-\dfrac{45}{110}}\right]\left[\frac{1-\dfrac{(50+t)}{110}}{1-\dfrac{50}{110}}\right]dt \\ &= \int_0^{60} \frac{(65-t)(60-t)}{3900}dt \\ &\approx 20.77 \end{aligned}$$

［例 7.2.2］ 在上题所给条件下，求状态（45:50）在此后 5～10 年之间终止的概率。

解：

$$\begin{aligned} Pr(5 < T \leqslant 10) &= Pr(T \geqslant 5) - Pr(T > 10) \\ &= {}_5p_{45:50} - {}_{10}p_{45:50} \\ &= {}_5p_{45} \cdot {}_5p_{50} - {}_{10}p_{45} \cdot {}_{10}p_{50} \\ &= \frac{s(50)}{s(45)} \cdot \frac{s(55)}{s(50)} - \frac{s(55)}{s(45)} \cdot \frac{s(60)}{s(50)} \\ &= \frac{5}{39} \end{aligned}$$

7.2.2 最后生存状态未来存续时间的概率分布

（$\overline{xy}$）的未来存续时间记作 $T = T$（$\overline{xy}$），显然 $T = \max$［T（x），T（y）］。对于 $t > 0$，

T 的分布函数为

$$F_T(t) = Pr(T \leqslant t) = Pr[T(x) \leqslant t \text{ 且 } T(y) \leqslant t] \tag{7.2.8}$$

若 $T(x)$ 与 $T(y)$ 相互独立，则

$$\begin{aligned} F_T(t) &= Pr[T(x) \leqslant t] Pr[T(y) \leqslant t] \\ &= (1 - {}_tp_x)(1 - {}_tp_y) \\ &= 1 - {}_tp_x - {}_tp_y + {}_tp_x \cdot {}_tp_y \end{aligned} \tag{7.2.9}$$

此时又有

$${}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x \cdot {}_tp_y \tag{7.2.10}$$

而 T 的密度函数则是

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{d}{dt}(1 - {}_tp_x - {}_tp_y + {}_tp_x \cdot {}_tp_y) \\ &= {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} + {}_tp_y \cdot \mu_{y+t} - {}_tp_x \cdot {}_tp_y(\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) \end{aligned} \tag{7.2.11}$$

同样，我们也定义状态 $(\overline{xy})$ 的终止力为

$$\mu_{\overline{xy}}(t) = \frac{f_{T(\overline{xy})}(t)}{1 - F_{T(\overline{xy})}(t)}$$

由已知的 $\mu_{\overline{xy}}(t)$ 便可确定状态未来存续时间的分布函数 $F_{T(\overline{xy})}(t)$。

当 $T(x)$、$T(y)$ 相互独立时，有

$$\mu_{\overline{xy}}(t) = \frac{{}_tp_x \cdot \mu_{x+t} + {}_tp_y \cdot \mu_{y+t} - {}_tp_x \cdot {}_tp_y(\mu_{x+t} + \mu_{y+t})}{{}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x \cdot {}_tp_y}$$

对于状态 $(\overline{xy})$，我们把

$$\mathring{e}_{\overline{xy}} = E[T(\overline{xy})] = \int_0^\infty t\, {}_tp_{\overline{xy}}\mu_{\overline{xy}}(t)\, dt$$

称为其完全平均余命。类似于第一章中对 $\mathring{e}_x$ 的简化计算，可得

$$\mathring{e}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty {}_tp_{\overline{xy}} dt \tag{7.2.12}$$

对于 $T(\overline{xy})$ 的方差，亦类似的有

$$Var[T(\overline{xy})] = 2\int_0^\infty t\, {}_tp_{\overline{xy}} dt - (\mathring{e}_{\overline{xy}})^2$$

[例 7.2.3] 根据例 7.2.1 所给条件，求状态 $(\overline{45:50})$ 的完全平均余命。

解：

$$\begin{aligned} \mathring{e}_{\overline{45:50}} &= \int_0^\infty {}_tp_{\overline{45:50}} dt \\ &= \int_0^\infty ({}_tp_{45} + {}_tp_{50} - {}_tp_{45} \cdot {}_tp_{50})\, dt \\ &= \int_0^\infty \frac{s(45+t)}{s(45)} dt + \int_0^\infty \frac{s(50+t)}{s(50)} dt - \mathring{e}_{45:50} \\ &= \int_0^{65} \frac{1 - \frac{45+t}{110}}{1 - \frac{45}{110}} dt + \int_0^{60} \frac{1 - \frac{50+t}{110}}{1 - \frac{50}{110}} dt - \mathring{e}_{45:50} \end{aligned}$$

$$= \frac{65}{2} + 30 - 20.77$$
$$= 41.73$$

[例 7.2.4] 根据例 7.2.1 所给条件，求状态（$\overline{45:50}$）在此后 5 年～10 年之间终止的概率。

解：

$$Pr[5 < T(\overline{45:50}) \leqslant 10]$$
$$= Pr[T(\overline{45:50}) > 5] - Pr[T(\overline{45:50}) > 10]$$
$$= {}_5p_{\overline{45:50}} - {}_{10}p_{\overline{45:50}}$$
$$= {}_5p_{45} + {}_5p_{50} - {}_5p_{45:50} - ({}_{10}p_{45} + {}_{10}p_{50} - {}_{10}p_{45:50})$$
$$= \frac{s(50)}{s(45)} + \frac{s(55)}{s(50)} - \frac{s(50)s(55)}{s(45)s(50)} - \left[\frac{s(55)}{s(45)} + \frac{s(60)}{s(50)} - \frac{s(55)s(60)}{s(45)s(50)}\right]$$
$$= \frac{1}{52}$$

7.2.3 两种状态间的关系

最后生存状态与联合生存状态在未来存续时间分布上有着密切的关系。先看分布函数：

$$\begin{aligned} F_{T(xy)}(t) + F_{T(\overline{xy})}(t) &= Pr[T(xy) \leqslant t] + Pr[T(\overline{xy}) \leqslant t] \\ &= Pr[T(x) \leqslant t \text{ 或 } T(y) \leqslant t] + Pr[T(x) \leqslant t \text{ 且 } T(y) \leqslant t] \\ &= Pr[T(x) \leqslant t] + Pr[T(y) \leqslant t] \\ &= F_{T(x)}(t) + F_{T(y)}(t) \end{aligned} \tag{7.2.13}$$

从而对于密度函数也有

$$f_{T(xy)}(t) + f_{T(\overline{xy})}(t) = f_{T(x)}(t) + f_{T(y)}(t) \tag{7.2.14}$$

又

$$\begin{aligned} {}_tp_{\overline{xy}} &= Pr[T(x) > t \text{ 或 } T(y) > t] \\ &= Pr[T(x) > t] + Pr[T(y) > t] - Pr[T(x) > t \text{ 且 } T(y) > t] \\ &= {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy} \end{aligned} \tag{7.2.15}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{xy}}(t) &= \frac{f_{T(\overline{xy})}(t)}{1 - F_{T(\overline{xy})}(t)} \\ &= \frac{f_{T(x)}(t) + f_{T(y)}(t) - f_{T(xy)}(t)}{{}_tp_{\overline{xy}}} \\ &= \frac{{}_tp_x\mu_{x+t} + {}_tp_y\mu_{y+t} - {}_tp_{xy}\mu_{xy}(t)}{{}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy}} \end{aligned} \tag{7.2.16}$$

以上这些关系对简化计算是有用的。例如，通过式（7.2.15）可得

$$\mathring{e}_{\overline{xy}} = \mathring{e}_x + \mathring{e}_y - \mathring{e}_{xy} \tag{7.2.17}$$

我们可以通过 $\mathring{e}_{xy}$ 和 $\mathring{e}_{\overline{xy}}$ 中已知的一个或便于计算的一个来计算另一个。

还应当注意两个有用的关系式。因为对于任何一个结果，当 $T(\overline{xy}) = T(x)$ 时，$T(xy) = T(y)$，而当 $T(\overline{xy}) = T(y)$ 时，$T(xy) = T(x)$，所以

$$T(\overline{xy}) + T(xy) = T(x) + T(y) \tag{7.2.18}$$

$$T(\overline{xy}) \cdot T(xy) = T(x) \cdot T(y) \tag{7.2.19}$$

我们可以通过式（7.2.19）简化 $T(xy)$ 与 $T(\overline{xy})$ 的协方差的计算

$$\begin{aligned} Cov[T(xy), T(\overline{xy})] &= E[T(xy)T(\overline{xy})] - E[T(xy)]E[T(\overline{xy})] \\ &= E[T(x)T(y)] - E[T(xy)]E[T(\overline{xy})] \end{aligned}$$

若 $T(x), T(y)$ 相互独立，则

$$Cov[T(xy), T(\overline{xy})] = \mathring{e}_x \mathring{e}_y - \mathring{e}_{xy} \mathring{e}_{\overline{xy}} \tag{7.2.20}$$

将（7.2.17）代入上式，整理得

$$Cov[T(xy), T(\overline{xy})] = (\mathring{e}_x - \mathring{e}_{xy})(\mathring{e}_y - \mathring{e}_{xy}) \tag{7.2.21}$$

上式右端两个因子显然都是非负数，因此除了 $\mathring{e}_{xy}$ 等于 $\mathring{e}_x$ 或 $\mathring{e}_y$ 这种极端情形外，$T(xy)$ 与 $T(\overline{xy})$ 总是正相关的。

§7.3 离散型未来存续时间的概率分布

7.3.1 联合生存状态的情形

下面我们考虑存续的整年数 $K(xy) = [T(xy)]$。对于 $k = 0,1,2,\cdots$，有

$$\begin{aligned} Pr(K = k) &= Pr(k \leqslant T < k + 1) \\ &= Pr(k < T \leqslant k + 1) \\ &= {}_{k|}q_{xy} \\ &= {}_kp_{xy} \cdot q_{x+k:y+k} \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

当 $T(x)$、$T(y)$ 相互独立时，有

$$\begin{aligned} {}_kp_{xy} &= {}_kp_x \cdot {}_kp_y \\ q_{x+k:y+k} &= 1 - p_{x+k:y+k} \\ &= 1 - p_{x+k}p_{y+k} \\ &= 1 - (1 - q_{x+k})(1 - q_{y+k}) \\ &= q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k}q_{y+k} \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

此时 $K(xy)$ 的分布率便可用 (x)、(y) 的未来生存整年数的分布表示如下：

$$\begin{aligned} Pr(K = k) &= {}_kp_x \cdot {}_kp_y(q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k}q_{y+k}) \\ &= {}_kp_y \cdot {}_{k|}q_x + {}_kp_x \cdot {}_{k|}q_y - {}_{k|}q_x \cdot {}_{k|}q_y \quad (k = 0,1,2,\cdots) \end{aligned} \tag{7.3.3}$$

对于状态 (xy)，我们把

$$e_{xy} = E[K(xy)] = \sum_{k=0}^{\infty} k \, {}_{k|}q_{xy}$$

称为其简约平均余命。类似于第一章中 e_x 的简化计算，可得

$$e_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_{xy} \tag{7.3.4}$$

7.3.2 最后生存状态的情形

下面我们来看看 $(\overline{xy})$ 的未来存续整年数 $K(\overline{xy}) = [T(\overline{xy})]$ 的分布律。对于 $k = 0$，

1，2，…，注意以下结果的等价性。

$$[K(\overline{xy}) = k \text{ 或 } K(xy) = k] = [K(x) = k \text{ 或 } K(y) = k]$$
$$[K(\overline{xy}) = k \text{ 且 } K(xy) = k] = [K(x) = k \text{ 且 } K(y) = k]$$

所以

$$Pr[K(\overline{xy}) = k \text{ 或 } K(xy) = k] = Pr[K(x) = k \text{ 或 } K(y) = k]$$

等式左边的概率可写为

$$Pr[K(\overline{xy}) = k] + Pr[K(xy) = k] - Pr[K(\overline{xy}) = k \text{ 且 } K(xy) = k]$$

等式右边的概率可写为

$$Pr[K(x) = k] + Pr[K(y) = k] - Pr[K(x) = k \text{ 且 } K(y) = k]$$

上述两个式子的第三项相等，故可消去，于是移项得

$$\begin{aligned} Pr[K(\overline{xy}) = k] &= Pr[K(x) = k] + Pr[K(y) = k] - Pr[K(xy) = k] \\ &= {}_kp_x \cdot q_{x+k} + {}_kp_y \cdot q_{y+k} - {}_kp_{xy} \cdot q_{x+k:y+k} \end{aligned} \tag{7.3.5}$$

当 $T(x)$、$T(y)$ 相互独立时，便有

$$\begin{aligned} Pr[K(\overline{xy}) = k] &= {}_kp_x \cdot q_{x+k} + {}_kp_y \cdot q_{y+k} - {}_kp_x\, {}_kp_y(q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k}q_{y+k}) \\ &= (1 - {}_kp_y)\, {}_kp_x \cdot q_{x+k} + (1 - {}_kp_x)\, {}_kp_y \cdot q_{y+k} + {}_kp_x \cdot {}_kp_y \cdot q_{x+k}q_{y+k} \\ &= (1 - {}_kp_y)\, {}_{k|}q_x + (1 - {}_kp_x)\, {}_{k|}q_y + {}_{k|}q_x \cdot {}_{k|}q_y \end{aligned} \tag{7.3.6}$$

对于状态 $(\overline{xy})$，我们把

$$e_{\overline{xy}} = E[K(\overline{xy})] = \sum_{k=0}^{\infty} k\, {}_{k|}q_{\overline{xy}} \tag{7.3.7}$$

称为其简约平均余命。

类似于第一章中 e_x 的简化计算，由式（7.2.15）可得

$$e_{\overline{xy}} = e_x + e_y - e_{xy} \tag{7.3.8}$$

与连续型的情况相同，对于任何一个结果，当 $K(\overline{xy}) = K(x)$ 时，$K(xy) = K(y)$，而当 $K(\overline{xy}) = K(y)$时，$K(xy) = K(x)$，所以

$$K(\overline{xy}) + K(xy) = K(x) + K(y) \tag{7.3.9}$$
$$K(\overline{xy}) \cdot K(xy) = K(x) \cdot K(y) \tag{7.3.10}$$

以上关系式在计算趸缴纯保费、年金精算现值以及有关协方差时会带来方便。

§7.4 非独立的寿命模型

在参加联合寿险或购买联合年金的两人中，一人的生死可能对另一人的寿命有影响。譬如一对夫妻，丈夫的死亡可能使妻子的寿命缩短。因此，在实际问题中，$T(x)$和$T(y)$常常不是相互独立的。

7.4.1 非独立个体的联合生存状态与最后生存状态

前面三节我们讨论了独立个体在联合生存状态与最后生存状态下的一些规律，得出了以下关系式：

$$ {}_tp_{xy} = {}_tp_x \cdot {}_tp_y $$

$$ {}_tq_{\overline{xy}} = {}_tq_x \cdot {}_tq_y $$

$$ \mu_{xy}(t) = \mu_{x+t} + \mu_{y+t} $$

但是在非独立个体假设下，这些关系将不会存在。

通常我们对联合分布函数有如下表达式：

$$ F_{T(x),T(y)}(t_1,t_2) = Pr[T(x) \leqslant t_1 \text{ 且 } T(y) \leqslant t_2] = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} f_{T(x),T(y)}(s,t)\,dtds $$

联合生存分布函数：

$$ S_{T(x),T(y)}(t_1,t_2) = Pr[T(x) > t_1 \text{ 且 } T(y) > t_2] = \int_{t_1}^{\infty}\int_{t_2}^{\infty} f_{T(x),T(y)}(s,t)\,dtds $$

以上两式可以在图 7－1 中表示出来：

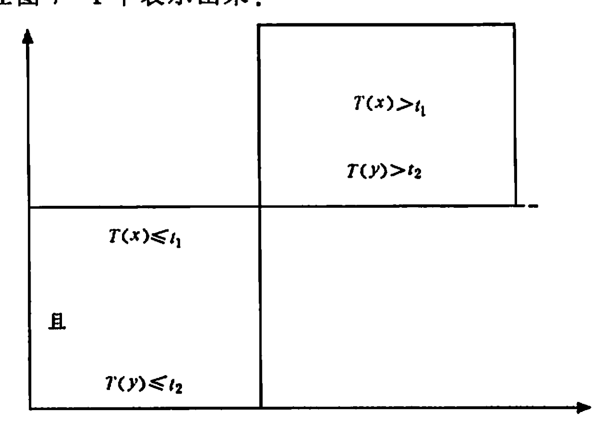


图 7－1

我们可以求得：

$$ \begin{aligned} {}_tp_{xy} &= 1 - {}_tq_{xy} = 1 - Pr[(T(x) \leqslant t) \cup (T(y) \leqslant t)] \\ &= 1 - \{Pr[(T(x) \leqslant t)] + Pr[(T(y) \leqslant t)] - Pr(T(\overline{xy}) \leqslant t)\} \\ &= 1 - [{}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_{\overline{xy}}] \\ &= {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{\overline{xy}} \end{aligned} $$

［例 7.4.1］ $T(x)$，$T(y)$ 的联合概率密度函数是：

$$ f_{T(x),T(y)}(t_1,t_2) = \frac{t_1+t_2}{1000}, 0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant 10 $$

计算边缘概率密度函数，边缘分布函数，最后生存状态分布函数和联合生存状态函数。

解：对 $t_1, t_2 \in [0,10]$

$$ \begin{aligned} F_{T(x),T(y)}(t_1,t_2) &= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} f_{T(x),T(y)}(s,t)\,dtds = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \frac{s+t}{1000}\,dtds \\ &= \int_0^{t_1} \left.\frac{st+\frac{t^2}{2}}{1000}\right|_{t=0}^{t_2} ds \\ &= \int_0^{t_1} \frac{st_2+\frac{t_2^2}{2}}{1000}\,ds \end{aligned} $$

$$= \frac{t_1^2 t_2 + t_1 t_2^2}{2000}$$

$$\Rightarrow {}_tq_{xy} = F_{T(x),T(y)}(t,t) = \frac{t^3}{1000}$$

$$\Rightarrow {}_tq_x = F_{T(x),T(y)}(t,10) = \frac{10t^2 + 100t}{2000} = \frac{t^2 + 10t}{200}$$

$$\Rightarrow f_{T(x)}(t) = \frac{d({}_tq_x)}{dt} = \frac{20t + 100}{2000} = \frac{t + 5}{100}$$

由密度函数 $f_{T(x),T(y)}(t_1,t_2) = \frac{t_1 + t_2}{1000}$ 的对称性，有 ${}_tq_x = {}_tq_y$，等等。

又：

$$S_{T(x),T(y)}(t,t) = \int_{t_1}^{10}\int_{t_2}^{10} f_{T(x),T(y)}(s,t)\,dtds$$

$$= \frac{1000 - 50(t_1 + t_2) - 5(t_1^2 + t_2^2) + \frac{t_1^2 t_2 + t_1 t_2^2}{2}}{1000}$$

$$\Rightarrow {}_tp_{xy} = S_{T(x),T(y)}(t,t) = \frac{(10 - t)(100 - t^2)}{1000} = \frac{(10 - t)^2(10 + t)}{1000}$$

$$\Rightarrow {}_tp_x = S_{T(x),T(y)}(t,0) = \frac{1000 - 50t - 5t^2}{1000}$$

当然，我们同样也可由 $1 - {}_tq_x$ 得到 ${}_tp_x$，由 ${}_tp_{xy} = {}_tp_x + {}_tp_y - (1 - {}_tq_{\overline{xy}})$ 求得 ${}_tp_{xy}$。

要得到 $T(x, y)$ 或 $T(\overline{x, y})$ 的密度函数，可通过下式求得。

$$f_{T(x,y)}(t) = -\frac{d({}_tp_{xy})}{dt} = \frac{100 - 20t + 3t^2}{1000}, 0 \leqslant t \leqslant 10$$

$$f_{T(\overline{x,y})}(t) = \frac{d({}_tq_{\overline{xy}})}{dt} = \frac{3t^2}{1000}, 0 \leqslant t \leqslant 10$$

7.4.2 非独立个体的参数模型

这里我们介绍两个非独立个体的参数模型：Frank's Copula 模型和 Common Shock 模型。

首先介绍 Frank's Copula 模型。在这个模型里，我们先给定个体边缘分布函数 $F_{T(x)}(s) = {}_sq_x, F_{T(y)}(t) = {}_tq_y$ 以及一个非 0 参数 α。该模型通过运用以上三个条件使得：

(1) 边缘分布函数得以保存；

(2) $T(x)$ 和 $T(y)$ 是非独立的。

Frank's Copula：

$$F_{T(x),T(y)}(s,t) = \frac{1}{\alpha}\ln\left[1 + \frac{(e^{\alpha \cdot {}_sq_x} - 1)(e^{\alpha \cdot {}_tq_y} - 1)}{e^{\alpha} - 1}\right], (0 \leqslant s \leqslant \omega - s, 0 \leqslant t \leqslant \omega - y)$$

根据该公式可以证明：

$$\lim_{\alpha \to 0} f_{T(x),T(y)}(s,t) = f_{T(x)}(s) \cdot f_{T(y)}(t)$$

即当 α 趋近于 0 时，$T(x)$ 与 $T(y)$ 的独立性逐渐显现并增强。

$$F_{T(x)}(s) = F_{T(x),T(y)}(s, \omega - s) = \frac{1}{\alpha}\ln\left[1 + \frac{(e^{\alpha \cdot {}_sq_x} - 1)(e^{\alpha \cdot 1} - 1)}{e^{\alpha} - 1}\right] = {}_sq_x$$

[例 7.4.2] (x) = (50), (y) = (60), 遵循 de - Moivre 定律, $\omega = 100$。假设 $\alpha = 0.5$, 计算:

(1) ${}_{10}q_{50}$, ${}_{10}q_{60}$;

(2) ${}_{10}q_{\overline{50:60}}$;

(3) ${}_{10}q_{50:60}$。

解: (1) 由于边缘分布仍然成立,

$\therefore \ {}_tq_x = \dfrac{t}{\omega - t}$

$\therefore \ {}_{10}q_{50} = \dfrac{10}{50}$, ${}_{10}q_{60} = \dfrac{10}{40}$

(2) 根据 Frank's Copula 公式, 有:

$${}_{10}q_{\overline{50:60}} = F_{T(x),T(y)}(10,10) = \frac{1}{0.5}\ln\left[1 + \frac{(e^{0.5\times0.2}-1)(e^{0.5\times0.25}-1)}{e^{0.5}-1}\right] = 0.0427$$

(3) ${}_{10}q_{50:60} = {}_{10}q_{50} + {}_{10}q_{60} - {}_{10}q_{\overline{50:60}}$

$${}_{10}q_{50:60} = {}_{10}q_{50} + {}_{10}q_{60} - {}_{10}q_{\overline{50:60}}$$

$$\therefore \quad = 0.2 + 0.25 - 0.0427$$

$$= 0.04073$$

接下来介绍 Common Shock 模型:

在该模型中, 假设 $T^*(x)$, $T^*(y)$ 是相互独立的, 同时 $T^*(x)$, $T^*(y)$ 和 Z 也相互独立, 且 $f_z = \lambda e^{-\lambda t}$, 而 $T(x)$, $T(y)$ 有如下关系:

$$T(x) = \min[T^*(x), Z], T(y) = \min[T^*(y), Z]$$

我们可以看出 $T(x)$ 与 $T(y)$ 并不独立, 该模型表明 "正常" 的生命时间可能会被一些意外事故、灾难所缩短, 比如空难事故, 而利用这些模型我们可以计算联合生存函数。

$$\begin{aligned} S_{T(x),T(y)}(s,t) &= Pr[T(x) > s \text{ 且 } T(y) > t] \\ &= Pr\{\min[T^*(x), Z] > s \text{ 且} \min[T^*(y), Z] > t\} \\ &= S_{T^*(x)}(s) \cdot S_{T^*(y)}(t) \cdot e^{-\lambda \max(s,t)} \end{aligned}$$

(由 $T^*(x), T^*(y)$ 和 Z 相互独立)

因此, 我们可以得到:

$${}_tp_{xy} = S_{T^*(x)}(s) \cdot S_{T^*(y)}(t) \cdot e^{-\lambda t}$$

边缘分布如下:

$${}_tp_x = S_{T(x)}(t) = S_{T(x),T(y)}(t,0) = S_{T^*(x)}(t) \cdot e^{-\lambda t}$$

$${}_tp_y = S_{T(x)}(t) = S_{T(x),T(y)}(0,t) = S_{T^*(y)}(t) \cdot e^{-\lambda t}$$

注意: $[T(x) > t] = [T(x) > t \text{ 且 } T(y) > 0]$

同时:

$$\mu_{xy}(t) = -\ln({}_tp_{xy})' = \mu_x^*(t) + \mu_y^*(t) + \lambda$$

$$\mu_x(t) = -\ln({}_tp_x)' = \mu_x^*(t) + \lambda$$

$$\mu_y(t) = -\ln({}_tp_y)' = \mu_y^*(t) + \lambda$$

[例 7.4.3] $T^*(x)$; $T^*(y)$ 相互独立, 分别服从参数为 λ_1, λ_2 的指数分布, 依据

Common Shock 计算：

(1) $T(x)$，$T(y)$ 和 $T(x,y)$ 的分布；

(2) $\bar{A}_x$，$\bar{A}_y$，$\bar{A}_{xy}$，$\bar{A}_{\overline{xy}}$；

(3) $\mathring{e}_x$，$\mathring{e}_y$，$\mathring{e}_{xy}$，$\mathring{e}_{\overline{xy}}$；

(4) (x, y) 状态由于意外失效的概率，即 $\{T^*(x), T^*(y) > Z\}$ 的概率。

解：(1)

$$F_{T(x)}(t) = Pr[T(x) \leqslant t]$$
$$= F_{T^*(x)}(t) \cdot e^{-\lambda t}$$
$$= e^{-(\lambda_1+\lambda)t}$$

即 $T(x)$ 服从参数为 $(\lambda_1 + \lambda)$ 的指数分布；同理，$T(y)$ 和 $T(x,y)$ 分别服从参数为 $(\lambda_2 + \lambda)$，$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda)$ 的指数分布。

(2) 在单生命常值死力的情形下，$\bar{A}_x = \dfrac{\mu}{\mu + \delta}$，类似地我们有：

$$\bar{A}_{xy} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda + \mu}$$

$$\bar{A}_x = \frac{\lambda_1 + \lambda}{\lambda_1 + \lambda + \mu}$$

$$\bar{A}_y = \frac{\lambda_2 + \lambda}{\lambda_2 + \lambda + \mu}$$

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \bar{A}_x + \bar{A}_y - \bar{A}_{xy}$$

(3) 由 (1) 知：

$$\mathring{e}_{xy} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda}$$

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda}$$

$$\mathring{e}_y = \frac{1}{\lambda_2 + \lambda}$$

$$\bar{e}_{\overline{xy}} = \bar{e}_x + \bar{e}_y - \bar{e}_{xy}$$

(4) $$Pr[Z < T^*(x), T^*(y)] = \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot S_{T^*(x)}(t) S_{T^*(y)}(t)\,dt$$
$$= \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} dt$$
$$= \frac{\lambda}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda}$$

§7.5 趸缴纯保费与年金精算现值

本节将把趸缴纯保费与年金精算现值的计算方法从单个生命状态 (x) 推广到一般状态 (u)。一般地，在关于状态 (x) 的基本公式中，以 (u) 取代 (x)，便得到关于状态

（u）的相应公式。而在独立性假设下，这些公式可以由状态（u）中各单个生命未来生存时间的分布表示。

7.5.1 在状态终止年度末给付的寿险与离散型生存年金

先考虑在状态终止那个保单年末给付 1 元的终身保险，以 K 表示状态（u）的未来存续整年数，则给付时间为 $K+1$，给付额 1 元在签单时的现值为 $Z=v^{k+1}$，从而趸缴纯保费为

$$A_u = E[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} Pr(K = k) \tag{7.5.1}$$

Z 的方差为

$$Var[Z] = {}^2A_u - (A_u)^2 \tag{7.5.2}$$

如果是 n 年两全保险，则趸缴纯保费为

$$A_{u:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} Pr(K = k) + v^n {}_np_u \tag{7.5.3}$$

在状态（u）存续期间，每保单年初给付 1 元的终身生存年金现值为 $Y = \ddot{a}_{\overline{k+1}|}$，其精算现值为

$$\ddot{a}_u = E[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_{k|}q_u$$

或

$$\ddot{a}_u = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_kp_u \tag{7.5.4}$$

如果是 n 年生存年金，则其精算现值为

$$\ddot{a}_{u:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_{k|}q_u + \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_np_u$$

或

$$\ddot{a}_{u:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_kp_u \tag{7.5.5}$$

Y 的方差为

$$Var[Y] = \frac{1}{d^2}[{}^2A_u - A_u^2] \tag{7.5.6}$$

趸缴纯保费与年金精算现值之间有如下关系式

$$A_u + d\ddot{a}_u = 1 \tag{7.5.7}$$

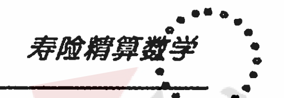
$$A_{u:\overline{n}|} = d\ddot{a}_{u:\overline{n}|} = 1 \tag{7.5.8}$$

利用上面的一般公式及 $K(xy)$、$K(\overline{xy})$的分布，便可得出对应于状态(xy)、($\overline{xy}$)的趸缴保费与年金精算现值公式。例如，由式(7.5.1)及式(7.3.1)可得

$$A_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_kp_{xy} q_{x+k:y+k}$$

由式（7.5.5）及式（7.2.15）可得

$$\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k ({}_kp_x + {}_kp_y - {}_kp_{xy})$$



联合生存状态与最后生态状态在趸缴纯保费与年金精算现值上也有类似于它们未来存续时间分布之关系，由 $K(\overline{xy})$、$K(xy)$、与 $K(x)$、$K(y)$ 之关系得

$$v^{K(\overline{xy})+1} + v^{K(xy)+1} = v^{K(x)+1} + v^{K(y)+1}$$

$$\ddot{a}_{\overline{k(\overline{xy})+1}|} + \ddot{a}_{\overline{k(xy)+1}|} = \ddot{a}_{\overline{k(x)+1}|} + \ddot{a}_{\overline{k(y)+1}|}$$

两边求期望值得

$$A_{\overline{xy}} + A_{xy} = A_x + A_y$$

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} + \ddot{a}_{xy} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y$$

以上结果在直观上也是很明显的：买一份（x）与（y）最后一个死亡时给付的保险加一份（x）与（y）最先一人死亡时给付的保险，那么无论（x）与（y）谁死亡后都能得以给付，这就无异于给（x）与（y）各买一个保险；买一份给付到（x）与（y）最后一人死亡时的年金，再加上一份给付到（x）与（y）最先一人死亡时的年金，那么无论先死亡者还是最后死亡者，都有一份年金，这就无异于给（x）与（y）各买一份年金。

[例 7.5.1] 一项年金在（x）与（y）都生存时每年年初给付 1，而当（x）与（y）仅有一人生存时每年年初给付 2/3。设 $K(x)$、$K(y)$ 相互独立，求以下表达式：(1) 年金的现值；(2) 年金的精算现值。

解：(1) 该项年金可看作每年年初给付 2/3 的最后生存年金和每年年初给付 1/3 的联合生存年金之组合，因此有现值

$$Z = \frac{2}{3}\ddot{a}_{\overline{K(\overline{xy})+1}|} + \frac{1}{3}\ddot{a}_{\overline{K(xy)+1}|}$$

(2) 求期望，便得该年金的精算现值

$$E[Z] = \frac{2}{3}\ddot{a}_{\overline{xy}} + \frac{1}{3}\ddot{a}_{xy}$$

将 $\ddot{a}_{\overline{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$ 代入得

$$E[Z] = \frac{2}{3}\ddot{a}_x + \frac{2}{3}\ddot{a}_y - \frac{1}{3}\ddot{a}_{xy}$$

7.5.2 在状态终止时给付的寿险与连续生存年金

现在来考虑在状态终止之时给付 1 元的终身寿险。设 T 为状态（u）的未来存续时间，则给付额 1 元在签单时的现值是 $Z = v^T$，从而趸缴纯保费为

$$\bar{A}_u = E[Z] = \int_0^{\infty} v^t\, {}_tp_u \mu_{x+t} dt \tag{7.5.9}$$

方差为

$$Var[Z] = {}^2\bar{A}_u - \bar{A}_u^2 \tag{7.5.10}$$

如果是 n 年生死保险，则趸缴纯保费为

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \int_0^{n} v^t\, {}_tp_u \mu_{u+t} dt + v^n\, {}_np_u \tag{7.5.11}$$

在状态（u）存续期间连续给付，每年给付总额为 1 元的生存年金在签单时的现值 $Y = \bar{a}_{\overline{T}|}$，其精算现值为

$$\bar{a}_u = E[Y] = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_tp_u \mu_{u+t} dt$$

或

$$\bar{a}_u = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_u dt \tag{7.5.12}$$

方差为

$$Var[Y] = \frac{1}{\delta^2}({}^2\bar{A}_u - \bar{A}_u^2) \tag{7.5.13}$$

如果是 n 年生存年金，则其精算现值为

$$\bar{a}_{u:\overline{n}|} = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_tp_u\mu_{u+t}dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\ {}_np_u$$

或

$$\bar{a}_{u:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\ {}_tp_u dt \tag{7.5.14}$$

此时，趸缴纯保费与年金精算现值也有如下关系

$$\bar{A}_u + \delta\bar{a}_u = 1$$
$$\bar{A}_{u:\overline{n}|} + \delta\bar{a}_{u:\overline{n}|} = 1$$

利用上面的一般公式及 $T(xy)$、$T(\overline{xy})$ 的分布，便得出对应于状态（xy）、（$\overline{xy}$）的趸缴纯保费和年金精算现值公式。例如由式（7.5.9）及式（7.2.15）、式（7.2.16）得

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_{\overline{xy}}\mu_{\overline{xy}}(t)dt$$
$$= \int_0^\infty v^t[{}_tp_x\mu_{x+t} + {}_tp_y\mu_{y+t} - {}_tp_{xy}\mu_{xy}(t)]dt$$

由式（7.5.12）及式（7.2.15）得

$$\bar{a}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_{\overline{xy}}dt$$
$$= \int_0^\infty v^t({}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy})dt$$

同样，由 T（xy）、T（$\overline{xy}$）与 T（x）T（xy）的关系有

$$v^{T(xy)} + v^{T(\overline{xy})} = v^{T(x)} + v^{T(y)}$$

$$\bar{a}_{\overline{T(xy)}|} + \bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|} = \bar{a}_{\overline{T(x)}|} + \bar{a}_{\overline{T(y)}|}$$

两边求期望值，即得状态（xy）与（$\overline{xy}$）之间在趸缴纯保费及年金精算现值上的关系

$$\bar{A}_{xy} + \bar{A}_{\overline{xy}} = \bar{A}_x + \bar{A}_y$$
$$\bar{a}_{xy} + \bar{a}_{\overline{xy}} = \bar{a}_x + \bar{a}_y$$

若 $T(x)$、$T(y)$ 相互独立，又由

$$v^{T(xy)}v^{T(\overline{xy})} = v^{T(x)}v^{T(y)}$$

可求得 $v^{T(xy)}$ 与 $v^{T(\overline{xy})}$ 的协方差

$$Cov[v^{T(xy)}, v^{T(\overline{xy})}] = E[v^{T(xy)}v^{T(\overline{xy})}] - E[v^{T(xy)}]E[v^{T(\overline{xy})}]$$
$$= E[v^{T(x)}v^{T(y)}] - \bar{A}_{xy}\bar{A}_{\overline{xy}}$$
$$= E[v^{T(x)}]E[v^{T(y)}] - \bar{A}_{xy}\bar{A}_{\overline{xy}}$$
$$= \bar{A}_x\bar{A}_y - \bar{A}_{xy}(\bar{A}_x + \bar{A}_y - \bar{A}_{xy})$$

$$= (\bar{A}_x - \bar{A}_{xy})(\bar{A}_y - \bar{A}_{xy})$$

一般情况下，上式右端两个因子都小于0，所以协方差为正数，即 $v^{T(xy)}$ 与 $v^{T(\overline{xy})}$ 正相关。

[例7.5.2] 在例7.2.1所给条件及给定利力 $\delta=0.06$ 下，求保额为10000元的5年定期寿险在下面两种情况下的趸缴纯保费：(1) 当且仅当 (45) 与 (50) 中最后一人在未来5年内死亡时立即给付保险金；(2) 当且仅当 (45) 与 (50) 中至少一人在未来5年内死亡时立即给付保险金。

解：(1) 这是相应于最后生存状态在状态终止时给付保险金的死亡保险，趸缴保费为

$$10000\bar{A}^{\ 1}_{\overline{45:50}:\overline{5}|} = 10000\int_0^5 v^t\ {}_tp_{\overline{45:50}}\mu_{\overline{45:50}}(t)\,dt$$

$$= 10000\int_0^5 v^t[\,{}_tp_{45}\mu_{45+t} + {}_tp_{50}\mu_{50+t} - {}_tp_{45:50}\mu_{45:50}(t)]\,dt$$

将

$${}_tp_{45} = \frac{S(45+t)}{S(45)} = \frac{65-t}{65},\ \mu_{45+t} = \frac{S'(45+t)}{S(45+t)} = \frac{1}{65-t}$$

$${}_tp_{50} = \frac{60-t}{60},\ \mu_{50+t} = \frac{1}{60-t},\ {}_tp_{45:50} = {}_tp_{45}\ {}_tp_{50}$$

$$\mu_{45:50}(t) = \mu_{45+t} + \mu_{50+t}$$

代入被积函数并化简，得

$$10000\bar{A}^{\ 1}_{\overline{45:50}:\overline{5}|} = 10000\int_0^5 \frac{2tv^t}{65\cdot 60}dt$$

$$= \frac{1000}{195}\left[\frac{5v^5}{\ln v} - \frac{v^5-1}{(\ln v)^2}\right]$$

$$= \frac{1000}{195}\left(\frac{5e^{-0.3}}{-0.06} - \frac{e^{-0.3}-1}{(0.06)^2}\right)$$

$$\approx 52.616(\text{元})$$

(2) 这是相应于联合生存状态在状态终止时给付保险金的死亡保险，趸缴纯保费记为 $\bar{A}^{\ 1}_{(45:50):\overline{5}|}$，于是

$$10000\bar{A}^{\ 1}_{(45:50):\overline{5}|} = 10000[\bar{A}^{\ 1}_{45:\overline{5}|} + \bar{A}^{\ 1}_{50:\overline{5}|} - \bar{A}^{\ 1}_{\overline{(45:50)}:\overline{5}|}]$$

因为

$$\bar{A}^{\ 1}_{45:\overline{5}|} = \int_0^5 v^t\ {}_tp_{45}\mu_{45+t}dt = \int_0^5 \frac{v^t}{65}dt$$

$$= \frac{v^5-1}{65\ln v} = \frac{e^{-0.3}-1}{65\cdot(-0.06)}$$

$$= 0.0664569$$

$\bar{A}^{\ 1}_{50:\overline{5}|} = 0.0719949$

所以趸缴纯保费为

$$10000\bar{A}^{\ 1}_{(45:50):\overline{5}|} = 1331.902(\text{元})$$

[例7.5.3] 设一连续给付年金按如下方式给付：(1) 以每年给付总量1确定给付 n 年；(2) n 年之后，当 (x) 和 (y) 都生存时，以每年给付总量1给付；(3) n 年之后，

当（y）已死亡而（x）仍生存时，以每年 3/4 给付；（4）n 年之后，当（x）已死亡而（y）仍生存时，按每年 1/2 给付。求该年金的精算现值。

解：该年金前 n 年给付的现值为

$$\int_0^n v^t dt = \bar{a}_{\overline{n}|}$$

n 年之后，即当 $t>n$ 时，年金到 t 时刻仍在给付可分为三种互斥的情况，即（2）、(3)、（4）中的情况。这三种情况发生概率分别为 ${}_tp_{xy}$、${}_tp_x(1-{}_tp_y)$ 和 ${}_tp_y(1-{}_tp_x)$，精算现值则分别为

$$\int_n^\infty v^t\, {}_tp_{xy}dt = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_{xy}dt - \int_0^n v^t\, {}_tp_{xy}dt = \bar{a}_{xy} - \bar{a}_{xy:\overline{n}|}$$

$$\frac{3}{4}\int_n^\infty v^t\, {}_tp_x(1-{}_tp_y)dt = \frac{3}{4}(\bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|}) - \frac{3}{4}(\bar{a}_{xy} - \bar{a}_{xy:\overline{n}|})$$

$$\frac{1}{2}\int_n^\infty v^t\, {}_tp_y(1-{}_tp_x)dt = \frac{1}{2}(\bar{a}_y - \bar{a}_{y:\overline{n}|}) - \frac{1}{2}(\bar{a}_{xy} - \bar{a}_{xy:\overline{n}|})$$

所求年金的精算现值应为以上所有各式之和，即

$$\bar{a}_{\overline{n}|} + \frac{3}{4}\bar{a}_x + \frac{1}{2}\bar{a}_y - \frac{1}{4}\bar{a}_{xy} - \frac{3}{4}\bar{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{2}\bar{a}_{y:\overline{n}|} + \frac{1}{4}\bar{a}_{xy:\overline{n}|}$$

这里仍假设 $T(x)$、$T(y)$ 相互独立。

§7.6 特殊死亡率假设下的估值

上一节给出了一些趸缴纯保费和年金精算现值的公式，但并没有解决其计算问题。在实际中，我们通常在某些合理的假设下简化趸缴纯保费和年金精算现值的计算。

7.6.1 寿命分布服从 Gompertz 假设的情形

先考虑死亡率服从 Gompertz 规律的情形，这时 $\mu_x = BC^x$，$\mu_y = BC^y$。因为在独立性假设下，对联合生存状态（xy）有

$$\begin{aligned}\mu_{xy}(s) &= \mu_{x+s} + \mu_{y+s} \qquad (s \geqslant 0)\\ &= B(C^x + C^y)C^s\\ &= BC^{\omega+s}\\ &= \mu_{\omega+s}\end{aligned}$$

因此可以考虑用某个单个生命状态（ω）来代替（xy），其中 ω 由下式确定

$$C^\omega = C^x + C^y$$

这时对任何 $t>0$，有

$$\begin{aligned}{}_tp_{xy} &= \exp\left(-\int_0^t \mu_{xy}(s)ds\right)\\ &= \exp\left(-\int_0^t \mu_{\omega+s}ds\right)\end{aligned}$$

$= {}_tp_{\omega}$

于是有关（xy）的各种概率、期望和方差等都与（ω）的相应概率、期望和方差相等。这样，有关（xy）的二维函数值表便可用（ω）相应的一维函数值表来代替。不过一般来说，对应 x 和 y 的整数值的 ω 的值是非整数，因此要在区间 $[\omega]$ 到 $[\omega]+1$ 上做一线性插值。

[例 7.6.1] 设（28）与（32）购买一个保额为 50000 元的联合生死两全保险，保险金在第一人死亡的保单年末给付或在两人到 35 年后仍生存时给付。由以下所给条件计算其趸缴纯保费：

（1）设生命表在 20 岁以后的寿命分布服从 Gompertz 假设，并且 $\mu_x = 0.00015(1.08)^x$，$x \geqslant 20$；

（2）$A_{39:\overline{35|}} = 0.21452$，$A_{40:\overline{35|}} = 0.22314$。

解：由 $(1.08)^{\omega} = (1.08)^{28} + (1.08)^{32}$ 解得

$$\omega = 39.15979$$

$A_{\omega:\overline{35|}}$可由线性插值计算

$$\begin{aligned} A_{\omega:\overline{35|}} &= ([\omega]+1-\omega)A_{[\omega]:\overline{35|}} + (\omega-[\omega])A_{[\omega]+1:\overline{35|}} \\ &= 0.84021A_{39:\overline{35|}} + 0.15979A_{40:\overline{35|}} \\ &= (0.84021)(0.21452) + (0.15979)(0.22314) \\ &= 0.21590 \end{aligned}$$

所求趸缴纯保费记为 $50000\,A_{(28:32):\overline{35|}}$，那么

$$\begin{aligned} 50000A_{(28:32):\overline{35|}} &= 50000A_{\omega:\overline{35|}} \\ &= 10795(\text{元}) \end{aligned}$$

7.6.2 寿命分布服从 Makeham 假设的情形

再考虑更为一般的情形，即假设死亡率服从 Makeham 规律，这时

$\mu_x = A + BC^x$，$\mu_y = A + BC^y$。在独立性的假设下，对联合生存状态有

$$\begin{aligned} \mu_{xy}(s) &= \mu_{x+s} + \mu_{y+s} \\ &= 2A + BC^s(C^x + C^y) \\ &= 2A + 2BC^sC^{\omega} \\ &= 2(A + BC^{\omega+s}) \\ &= 2\mu_{\omega+s} = \mu_{\omega\omega}(s) \end{aligned}$$

于是可以用另一个联合生存状态（$\omega\omega$）来代替（xy），其中 ω 由下式确定

$$2C^{\omega} = C^x + C^y$$

这样，有关（xy）二维函数值表便可用（xx）的一维函数值表代替。在实务中，通常列出 $\ddot{a}_{xx}$和 A_{xx}的函数值表供计算时使用。同样，由于对应于 x 和 y 的整数值的 ω 一般非整数，因此也要进行一次插值，才能得出最后结果。

[例 7.6.2] 设（35）与（40）购买一个保额为 100000 元的最后生存者终身寿险，保险金在第二人死亡的保单年末给付。已知：

（1）生命表在 20 岁以后的寿命分布服从 Makeham 假设，并且

$$1000\mu_x = 0.7 + 0.05(10^{0.04}), \ x \geqslant 20$$

(2) 在给定利率 $i=0.06$ 时有：

$$A_{37:37} = 0.20321, A_{38:38} = 0.21181$$
$$A_{35} = 0.012872, A_{40} = 0.16132$$

求其趸缴纯保费。

解：由关系式 $A_{\overline{xy}} + A_{xy} = A_x + A_y$，所求趸缴纯保费可表示为

$$100000A_{\overline{35:40}} = 100000(A_{35} + A_{40} - A_{35:40})$$

由 $2(10^{0.04})^{\omega} = (10^{0.04})^{35} + (10^{0.04})^{40}$ 解得：

$$\omega = 37.78532$$

于是

$$\begin{aligned} A_{35:40} &= A_{\omega\omega} \\ &= 0.21468A_{37:37} + 0.78532A_{38:38} \quad \text{（运用线性插值）} \\ &= (0.21468)(0.20321) + (0.78532)(0.21181) \\ &= 0.20996 \end{aligned}$$

因此，所求趸缴纯保费为：

$$100000A_{\overline{35:40}} = 100000(0.12872 + 0.16132 - 0.20996) = 8008(\text{元})$$

[例 7.6.3] 一项年金在（60）与（70）都生存时每年年初给付 15000 元，当（60）与（70）仅有一人生存时每年年初给付 10000 元。已知：

(1) 生命表在 20 岁以后的寿命分布服从 Makeham 假设，并且

$$1000\mu_x = 0.7 + 0.05(10^{0.04})^x, \ x \geqslant 20$$

(2) 在给定利率 $i=0.06$ 时有：

$$\ddot{a}_{66:66} = 7.58658, \ \ddot{a}_{67:67} = 7.31867$$
$$\ddot{a}_{60} = 11.14535, \ \ddot{a}_{70} = 8.56925$$

求该项年金的精算现值。

解：年金的精算现值可表示为

$$APV = 10000\ddot{a}_{60} + 10000\ddot{a}_{70} - 5000\ddot{a}_{60:70}$$

由 $2(10^{0.04})^{\omega} = (10^{0.04})^{60} + (10^{0.04})^{70}$ 解得

$$\omega = 66.11276$$

于是

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{60:70} &= \ddot{a}_{\omega\omega} \\ &= 0.88724\ddot{a}_{66:66} + 0.11276\ddot{a}_{67:67} \quad \text{（运用线性插值）} \\ &= 7.55637 \end{aligned}$$

将有关 $\ddot{a}_{60}$、$\ddot{a}_{70}$ 及 $\ddot{a}_{60:70}$ 的数值代入，可求得年金精算现值：

$$AVP = 159365.15(\text{元})$$

7.6.3 各年龄内死亡服从均匀分布的情形

上面讨论了在状态终止年末给付的寿险的趸缴纯保费计算问题以及按年给付生存年金的现值计算问题。我们现在假设单个生命的死亡时间在每个年龄内服从均匀颁布。在这个

进一步的假设下，便可计算在状态终止后立即给付保险金这种情况的趸缴纯保费。

我们知道，当死亡时间在年龄 x 到 $x+1$ 岁间服从均匀分布时，有

$$ {}_tp_x = 1 - tq_x \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) $$

$$ {}_tp_x\mu_{x+t} = \frac{d}{dt}(1 - {}_tp_x) = q_x $$

现又假设 $T(x)$，$T(y)$ 相互独立，于是对于联合生存状态 (xy) 有

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{xy}\mu_{xy}(t) &= {}_tp_x \cdot {}_tp_y(\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) \\
&= {}_tp_y({}_tp_x\mu_{x+t}) + {}_tp_x({}_tp_y\mu_{y+t}) \\
&= (1 - tq_y)q_x + (1 - tq_x)q_y \\
&= q_x + q_y - q_xq_y + (1 - 2t)q_xq_y \\
&= q_{xy} + (1 - 2t)q_xq_y
\end{aligned}
\tag{7.6.1}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{xy} &= \int_0^\infty v^t\, {}_tp_{xy}\mu_{xy}(t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^\infty \int_0^1 v^{k+s}\, {}_{k+s}p_{xy}\mu_{xy}(k+s)\,ds \\
&= \sum_{k=0}^\infty v^{k+1}\, {}_kp_{xy}\int_0^1 v^{s-1}\, {}_sp_{x+k:y+k}\mu_{x+k:y+k}(s)\,ds \\
&= \sum_{k=0}^\infty v^{k+1}\, {}_kp_{xy}\int_0^1 v^{s-1}[q_{x+k:y+k} + (1-2s)q_{x+k}q_{y+k}]\,ds \\
&= \sum_{k=0}^\infty v^{k+1}\, {}_kp_{xy}q_{x+k:y+k}\int_0^1 (1+i)^{1-s}ds + \sum_{k=0}^\infty v^{k+1}\, {}_kp_{xy}q_{x+k}q_{y+k}\int_0^1 (1+i)^{1-s}(1-2s)\,ds \\
&= \frac{i}{\delta}A_{xy} + \frac{i}{\delta}\left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right)\sum_{k=0}^\infty v^{k+1}\, {}_kp_{xy}q_{x+k}q_{y+k}
\end{aligned}
\tag{7.6.2}
$$

如果是假设状态 (xy) 的终止时间在未来的每一年内服从均匀分布，则

$$ {}_tp_{x+k:y+k}\mu_{x+k:y+k}(t) = q_{x+k:y+k} \qquad (k = 0,1,2,\cdots,0 \leqslant t \leqslant 1) $$

这时有：

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{xy} &= \sum_{k=0}^\infty v^{k+1}\, {}_kp_{xy}\int_0^1 v^{s-1}\, {}_sp_{x+k:y+k}\mu_{x+k:y+k}(s)\,ds \\
&= \sum_{k=0}^\infty v^{k+1}\, {}_kp_{xy}q_{x+k:y+k}\int_0^1 v^{s-1}\,ds \\
&= \frac{i}{\delta}A_{xy}
\end{aligned}
\tag{7.6.3}
$$

这与单个生命的情形是一致的。

式 (7.6.2) 与式 (7.6.3) 的差别在于“$T(xy)$ 在未来各年内均匀分布”与“$T(x)$，$T(y)$ 相互独立在各年内均匀分布”不是等同的。事实上，当给定 $T(x)$，$T(y)$ 在不同区间时，$T(xy)$ 的分布在该区间内将左移。这样就使得这些年内的保险金给付提前，因此保费也相应增加，这便是式 (7.6.2) 中多出的第二项。这一项是 (x)，(y) 在未来同一年死亡时才给付保险金这种情况下趸缴纯保费与一个约等于 $\frac{i}{\delta}$ 的利息项之积。此二者都很小，因此我们常常用式 (7.6.3) 来代替式 (7.6.2)。

有关最后生存者保险的趸缴纯保费可以通过联合生命保险的趸缴纯保费来计算，这里不另行推导。

［例 7.6.4］　在例 7.5.2 的条件及 $T(x)$，$T(y)$ 相互独立并在未来每一年内均匀分布的假设下，求在状态$\overline{35:40}$终止时立即给付 100000 元的最后生存者终身寿险的趸缴纯保费。

解：$\bar{A}_{\overline{35:40}} = \bar{A}_{35} + \bar{A}_{40} + \bar{A}_{35:40}$

$$\approx \frac{i}{\delta}A_{35} + \frac{i}{\delta}A_{40} - \frac{i}{\delta}A_{35:40}$$

$$= \frac{i}{\delta}A_{\overline{35:40}}$$

所求趸缴纯保费约为

$$100000\bar{A}_{\overline{35:40}} \approx 100000\,\frac{i}{\delta}A_{\overline{35:40}}$$
$$= 8008 \cdot \frac{0.06}{\ln 1.06}$$
$$= 8245.91(\text{元})$$

§7.7　考虑死亡顺序的趸缴纯保费

本节我们将考虑保险给付不仅依赖于终止时刻，而且依赖于状态中单个生命的死亡顺序的情形。

7.7.1　(x) 在 (y) 之前并在 n 年内死亡的情形

先从事件发生的概率来讨论。我们把“(x) 在 (y) 之前并在 n 年内死亡”这一事件发生的概率记为${}_nq_{xy}^{1}$，这里 x 上的 1 表示 (x) 在 (y) 之前死亡，n 表示 (x) 在未来 n 年内死亡。${}_nq_{xy}^{1}$是 $T(x)$、$T(y)$ 的联合密度函数在区域 $D=[T(x)\leqslant T(y)\ (0\leqslant T(x)\leqslant n)]$ 上的二重积分。在独立性的假设下，被各函数则为 $T(x)$ 与 $T(y)$ 各自的密度函数之积。这时有

$$
\begin{aligned}
{}_nq_{xy}^{1} &= \int_0^n\int_t^\infty {}_sp_y\mu_{y+s}\,{}_tp_x\mu_{x+t}\,ds\,dt \\
&= \int_0^n {}_tp_x\mu_{x+t}\left[\int_t^\infty {}_sp_y\mu_{y+s}\,ds\right]dt \\
&= \int_0^n {}_tp_x\mu_{x+t}\,{}_tp_y\,dt \\
&= \int_0^n {}_tp_{xy}\cdot\mu_{x+t}\,dt
\end{aligned}
\tag{7.7.1}
$$

在 n 年之内，当 (x) 死亡时若 (y) 仍生存则给付 1 元的现值为：

$$
Z = \begin{cases} v^{T(x)} & (T(x)\leqslant T(y)\text{ 且 }T(x)\leqslant n) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}
$$

那么趸缴纯保费为

$$\bar{A}^{1}_{xy:\overline{n|}} = E(Z) = \int_0^n \int_t^\infty v^t \, {}_s p_y \mu_{y+s} \, {}_t p_x \mu_{x+t} ds dt$$
$$= \int_0^n v^t \, {}_t p_{xy} \mu_{x+t} dt$$

如果是终身寿险，则有

$$\bar{A}^{1}_{xy} = E(Z) = \int_t^\infty v^t \, {}_t p_{xy} \mu_{x+t} dt$$

7.7.2 （y）在（x）之后并在 n 年之内死亡的情形

再来看看（y）在（x）之后并在未来 n 年之内死亡的情形。这种情形的发生的概率记为 ${}_nq^{2}_{xy}$，y 上的 2 表示（y）死于（x）之后，n 表示（y）在未来 n 年内死亡。这个概率是 $T(x)$、$T(y)$ 的联合密度函数在区域 $D = [T(x) \geq 0, T(x) \leq T(y) \leq n)]$ 上的二重积分。当 $T(x)$、$T(y)$ 的相互独立时，有

$$\begin{aligned} {}_nq^{\ 2}_{xy} &= \int_0^n \int_0^t {}_s p_x \mu_{x+s} \, {}_t p_y \mu_{y+t} ds dt \\ &= \int_0^n (1 - {}_t p_x) \, {}_t p_y \mu_{y+t} dt \\ &= {}_nq_y - {}_nq^{\ 1}_{xy} \end{aligned} \tag{7.7.2}$$

注意：式（7.7.2）的 ${}_nq^{\ 1}_{xy}$ 中 y 上的 1 代表 y 先于 x 死亡，以下相同。

这种情形在（y）死亡时立即给付 1 元的现值为

$$Z = \begin{cases} v^{T(y)} & (T(x) \leq T(y) \leq n) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

那么趸缴纯保费为

$$\begin{aligned} \bar{A}^{2}_{xy:\overline{n|}} &= E(Z) = \int_0^n \int_0^t v^t \, {}_s p_x \mu_{x+s} \, {}_t p_y \mu_{y+t} ds dt \\ &= \int_0^n v^t (1 - {}_t p_x) \, {}_t p_y \mu_{y+t} dt \\ &= \bar{A}^{1}_{y:\overline{n|}} - \bar{A}^{1}_{xy:\overline{n|}} \end{aligned}$$

如果是终身寿险，则趸缴纯保费为：

$$\begin{aligned} \bar{A}^{2}_{xy} &= \int_0^\infty v^t (1 - {}_t p_x) \, {}_t p_y \mu_{y+t} dt \\ &= \bar{A}_y - \bar{A}^{1}_{xy} \end{aligned}$$

在式（7.7.2）中交换积分顺序可得

$$\begin{aligned} {}_nq^{2}_{xy} &= \int_0^n \int_s^n {}_s p_x \mu_{x+s} \, {}_t p_y \mu_{y+t} ds dt \\ &= \int_0^n ({}_s p_y - {}_n p_y) \, {}_s p_x \mu_{x+s} ds \\ &= {}_tq^{1}_{xy} - {}_n p_y \, {}_n q_x \end{aligned} \tag{7.7.3}$$

于是可知

$${}_nq^{1}_{xy} \geq {}_nq^{2}_{xy}$$

7.7.3 在特殊假设下趸缴纯保费的计算

下面我们通过例题来说明在 Gompertz 假设和 Makeham 假设下趸缴纯保费的计算。由于

$\bar{A}^{2}_{xy:\overline{n|}} = \bar{A}^{1}_{y:\overline{n|}} - \bar{A}^{1}_{xy:\overline{n|}}$，所以只需讨论某人在另一人之前并在 n 年内死亡情形即可，有关概率也可通过式（7.7.3）由一种情形计算另一情形。

［例 7.7.1］ 设死力由 Gompertz 规律给出，在 $T(x)$ 与 $T(y)$ 相互独立的情况下，求：(1) 在 (x) 死亡时若 (y) 仍然生存，则立即给付 1 的 n 年定期寿险的趸缴纯保费；(2) (x) 先于 (y) 并在 n 年内死亡的概率。

解：(1) 由所给条件，有 $\mu_{x+t} = BC^{x+t}$、$\mu_{y+t} = BC^{y+t}$ 及 $\mu_{xy}(t) = \mu_{x+t} + \mu_{y+t}$，于是所求趸缴纯保费为

$$\begin{aligned}\bar{A}^{1}_{xy:\overline{n|}} &= \int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}BC^{x+t}dt\\ &= \frac{C^x}{C^x+C^y}\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}B(C^x+C^y)C^tdt\\ &= \frac{C^x}{C^x+C^y}\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}\mu_{xy}(t)\,dt\\ &= \frac{C^x}{C^x+C^y}\bar{A}^{1}_{xy:\overline{n|}}\end{aligned}$$

若令 $C^x + C^y = C^w$，此时 ${}_tp_{xy} = {}_tp_w$，$\mu_{xy}(t) = \mu_{w+t}$，而，

$$\begin{aligned}\bar{A}^{1}_{xy:\overline{n|}} &= \frac{C^x}{C^w}\int_0^n v^t\,{}_tp_w\mu_{w+t}dt\\ &= \frac{C^x}{C^w}\bar{A}^{1}_{w:\overline{n|}}\end{aligned}$$

(2) 同样，当 $v=1$ 时，${}_nq^{1}_{xy}$ 在数值上即等于 $\bar{A}^{1}_{xy:\overline{n|}}$，于是

$${}_nq^{1}_{xy} = \frac{C^x}{C^w}\,{}_nq_w$$

［例 7.7.2］ 将上题死力的假设改为 Makeham 规律，计算所求的趸缴纯保费与概率。

解：(1) 由所给条件，有

$$\mu_{xy}(t) = \mu_{x+t} + \mu_{y+t} = 2A + B(C^x + C^y)C^t$$

所求保费为

$$\begin{aligned}\bar{A}^{1}_{xy:\overline{n|}} &= \int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}(A + BC^{x+t})\,dt\\ &= A\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}dt + \frac{C^x}{C^x+C^y}\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}B(C^x+C^y)C^tdt\\ &= A\left(1 - \frac{2C^x}{C^x+C^y}\right)\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}dt + \frac{C^x}{C^x+C^y}\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}[2A + B(C^x+C^y)C^t]\,dt\\ &= A\left(1 - \frac{2C^x}{C^x+C^y}\right)\bar{a}_{xy:\overline{n|}} + \frac{C^x}{C^x+C^y}\bar{A}^{1}_{xy:\overline{n|}}\end{aligned}$$

令 $2C^w = C^x + C^y$，此时 $\mu_{xy}(t) = \mu_{ww}(t)$，${}_tp_{ww} = {}_tp_{xy}$，于是

$$\bar{A}^{1}_{xy:\overline{n|}} = A\left(1 - \frac{C^x}{C^w}\right)\bar{a}_{ww:\overline{n|}} + \frac{C^x}{2C^w}\bar{A}^{1}_{ww:\overline{n|}}$$

(2) 同样，在 $\bar{A}^{1}_{xy:\overline{n|}}$ 中令 $v=1$，便得到

$${}_nq^{1}_{xy} = A\left(1 - \frac{2C^x}{2C^w}\right)\int_0^n {}_tp_{ww}dt + \frac{C^x}{2C^w}\int_0^n {}_tp_{ww}\mu_{ww}(t)\,dt$$

$$= A\left(1 - \frac{C^x}{C^w}\right)\dot{e}_{ww:\overline{n}|} + \frac{C^x}{2C^w}\,{}_nq_{ww}$$

其中 $\dot{e}_{ww:\overline{n}|}$ 为联合生存状态在 n 年期限中的平均剩余持续时间

最后我们看看均匀分布的假设对趸缴纯保费的影响。在（x）先于（y）死亡年末给付 1 的趸缴纯保费为

$$A_{xy}^{1} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_{xy}\,q_{x+k:y+k}^{1} \tag{7.7.4}$$

在每个人死亡的发生于各年龄内服从均匀分布的假设下，有

$$\begin{aligned} q_{x+k:y+k}^{1} &= \int_0^1 {}_sp_{x+k:y+k}\,\mu_{x+k+s}ds \\ &= \int_0^1 q_{x+k}(1 - sq_{y+k})\,ds \\ &= q_{x+k}\left(1 - \frac{1}{2}q_{y+k}\right) \end{aligned} \tag{7.7.5}$$

现将 ${}_sp_{x+k:y+k}\mu_{x+k+s}$ 用 $q_{x+k:y+k}^{1}$ 表示如下

$$\begin{aligned} {}_sp_{x+k:y+k}\mu_{x+k+s} &= q_{x+k}(1 - sq_{y+k}) \\ &= q_{x+k}\left(1 - \frac{1}{2}q_{x+k}\right) + \left(\frac{1}{2} - s\right)q_{x+k}q_{y+k} \\ &= q_{x+k:y+k}^{1} + \left(\frac{1}{2} - s\right)q_{x+k}q_{y+k} \end{aligned} \tag{7.7.6}$$

那么对于在（x）死亡时立即给付的情形，趸缴纯保费为

$$\begin{aligned} \bar{A}_{xy}^{1} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k\,{}_kp_{xy}\int_0^1 v^s\,{}_sp_{x+k:y+k}\mu_{x+k+s}ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_{xy}\left[q_{x+k:y+k}^{1}\right]\int_0^1(1+i)^{1-s}ds + q_{x+k}q_{y+k}\int_0^1(1+i)^{1-s}\left(\frac{1}{2} - s\right)ds\right] \\ &= \frac{i}{\delta}A_{xy}^{1} + \frac{1}{2}\,\frac{i}{\delta}\left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right)\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_{xy}q_{x+k}q_{y+k} \end{aligned} \tag{7.7.7}$$

上式的第二项对于整个保费来说非常小，它为式（7.6.2）中的第二项的 1/2，通常可略去而得到近似计算式

$$\bar{A}_{xy}^{1} \approx \frac{i}{\delta}A_{xy}^{1}$$

习　题　七

下列问题中均假设各生命的未来生存时间为相互独立的随机变量。

1. 利用单个生命的生存概率 ${}_np_x$ 和 ${}_np_y$ 表示。

(1)（xy）将存续 n 年的概率；

(2)（x）和（y）中恰好有一个活过 n 年的概率；

(3)（x）和（y）中至少有一个活过 n 年的概率；

(4)（xy）将在 n 年内终止的概率；

(5)（x）和（y）都在 n 年内死亡的概率。

2. 证明 (x) 活过 n 年且 (y) 活过 n－1 年的概率可表示为：

$\frac{{}_{n}p_{x:y-1}}{p_{y-1}}$ 或 $p_x \cdot {}_{n-1}p_{x+1:y}$

3. 给出 ${}_{25}p_{25:50}=0.2$ 和 ${}_{15}p_{25}=0.9$，计算 40 岁的人活过 75 岁的概率。

4. 如果 $\mu_x = \frac{1}{100-x}(0 \leqslant x < 100)$，计算：

(1) ${}_{10}p_{40:50}$；(2) $\mathring{e}_{40:50}$；(3) $Var[T(40:50)]$

5. 求：$\frac{d\mathring{e}_{xx}}{dx}$

6. 生命 I 和生命 II 的死力分别为：

$$\mu_x^{I} = \ln\frac{10}{9}(x \geqslant 0)$$

和

$$\mu_x^{II} = (10-x)^{-1}(0 \leqslant x < 100)$$

若两个生命均为 1 岁，求最初的死亡发生在 3 岁至 5 岁之间的概率。

7. 设 $\mu_x = \frac{1}{100-x}(0 \leqslant x < 100)$，计算：

(1) ${}_{10}p_{\overline{40:50}}$；(2) $\mathring{e}_{\overline{40:50}}$

(3) $Var[T(\overline{40:50})]$；(4) $Cov[T(40:50), T(\overline{40:50})]$。

8. 求 (x) 和 (y) 中至少有一人在第 n＋1 年死亡的概率。这个概率是否等于 ${}_{n|}q_{\overline{xy}}$？为什么？

9. 设两个 x 岁的人具有相同的寿命分布，求 ${}_{t}p_{\overline{xx}} - {}_{t}p_{x}$ 的最大可能取值。

10. 用单个生命状态的死亡概率、生存概率和死力表示 (40) 和 (50) 中最后一个生存者在 70 岁至 75 岁死亡的概率。

11. 年给付额为 1 元的连续型的给付条件为：(30) 与 (45) 至少有一人活着时给付，但当 (30) 仍活着并且在 40 岁以下时不给付。求该年金的精算现值。

12. 对于 (25) 和 (30)，当其中至少有一人活着并在 50 岁以下时，可以获得年给付额为 1 元的连续型年金给付。试用单生命年金值和联合生命年金值表示该年金的精算现值。

13. 证明：

$$a_{\overline{\overline{xy}:\overline{n}|}} = a_{\overline{n}|} + {}_{n|}a_{xy}$$

并说明该年金的基本给付。

14. 对于趸缴纯保费 $\bar{A}_{\overline{x:\overline{n}|}}$，说明该保险的给付方式，并证明：

$$\bar{A}_{\overline{x:\overline{n}|}} = A_x - \bar{A}_{x:\overline{n}|} + v^n$$

15. 若在 50 岁以后，只要 (25) 和 (30) 中至少有一人活着，便可在每年末获得 1 个单位的年金给付。试用单生命年金值和联合生命年金值表示该延期年金的精算现值。

16. 年给付额为 1 元的连续型年金，当 (40) 和 (55) 中至少有一人生存并超过 60 岁时给予给付，但当 (40) 活着并在 55 岁以下时不予给付。请给出此年金的精算现值表达式。

17. 只要 (x) 在 (y) 活着时在 (y) 死亡后 n 年内仍生存，则可获得给付额为 1 元

的年末年金给付，但年金的最长给付期为 m 年，$m>n$。证明：该年金的精算现值为

$$a_{x:\overline{n}|}+{}_nE_x a_{(x+n:y):\overline{m-n}|}$$

18. 对于联合生存状态（xy），如果：

（1）死亡率服从 Gompertz 规律且 $C=2^{0.2}$，那么 $\ddot{a}_{xy}=\ddot{a}_{56}$；

（2）死亡率服从 Makeham 规律，且 $C=2^{0.2}$，那么 $\ddot{a}_{xy}=\ddot{a}_{zz}$。

求 z。

19. 所给生命表适合 Makeham 规律，状态（ww）是相应于年龄 x 和 y 的等价相同年龄状态。证明：

（1）${}_tp_w$ 是 ${}_tp_x$ 和 ${}_tp_y$ 的几何平均值；

（2）${}_tp_x+{}_tp_y>2\,{}_tp_w$，$x\neq y$；

（3）$a_{\overline{xy}}>a_{\overline{ww}}$，$x\neq y$。

20. 在 Makeham 规律下，当用状态（$\omega\,\omega$）取代状态（xy）时，证明

$$\omega-y=\frac{\ln(C^{\Delta}+1)-\ln 2}{\ln C}$$

这里 $\Delta=x-y\geqslant 0$（这说明 ω 可以通过在较小的年龄 y 上加一个 Δ 的函数而得到。这个性质称为一致年龄增加律（Law of Uniform Seniority））。

21. 设 20 岁以后的死力符合 Makeham 假设：$1000\mu_x=0.7+0.05\ (10^{0.04})^x$，$x\geqslant 20$。又设 $i=0.06$，并给出 ${}_{20}p_{50}=0.7391608$ 以及 $\ddot{a}_{56:56}=10.22273$，$\ddot{a}_{57:57}=9.96964$，$\ddot{a}_{66:66}=7.58658$，$\ddot{a}_{67:67}=7.31867$，计算 $\ddot{a}_{(50:60):\overline{10}|}$。

22. 所给生命表适合 Makeham 规律，证明 $\bar{a}_{xy}$ 等于（w）的单生命年金的精算现值，这里 $C^w=C^x+C^y$，利用利力 $\delta'=\delta+A$，并进一步证明：

$$\bar{A}_{xy}=\bar{A}'_w+A\bar{a}'_w$$

这里带撇号的函数是以利力 δ' 计算的。

23. 考虑两个生命表，关于男性的记为 M，关于女性的记为 F，并且分别具有死力：

$$\mu_Z^M=3a+\frac{3bz}{2}\ 和\ \mu_Z^F=a+bz$$

我们希望利用关于一男一女年龄均为 w 的两个生命的精算现值表，计算 x 岁的男性和 y 岁的女性的联合生命年金的精算现值。试用 x 和 y 表示 w。

24. 设 $T(x)$ 和 $T(y)$ 的相互独立并在下一年龄内服从均匀分布。给定（x）和（y）均在下一年内死亡，证明（xy）的未来存续时间在该年内并不服从均匀分布。（提示：证明 $Pr[T(xy)\leqslant t\mid\{(T(x)\leqslant 1)\cap(T(y)\leqslant 1)\}]=2t-t^2$

25. 证明在（x）死亡的年末（y）仍生存时给付 1 的趸缴纯保费可表示为：

$$vp_y\ddot{a}_{x:y+1}-a_{xy}$$

26. 设 $q_x=q_y=1$，且对于（x）和（y），死亡的发生在这一年龄内服从均匀分布，求 $\mathring{e}_{xy}$。

27. 一保险在（50）死亡时立即为已死亡或已达到 40 岁的（20）提供 1 单位保险金，试用单生命保险和最初死亡者保险的趸缴纯保费表示该保险的趸缴纯保费。

28. 一保险在（y）死亡后 n 年内（x）死亡时立即给付 1 单位保险金，试用生存保险和最初死亡者保险的趸缴纯保费表示该保险的趸缴纯保费。

29. 在适合 Makeham 规律的生命表中给出 $A=0.003$ 和 $C^{10}=3$。

(1) 若 $\mathring{e}_{40:50}=17$，计算 ${}_{\infty}q^{1}_{40:50}$。

(2) 用 $\bar{A}_{40:50}$和 $\bar{a}_{40:50}$表示 $\bar{A}^{1}_{40:50}$。

30. 设 $\mu_x=\dfrac{1}{100-x}$，$0\leqslant x<100$，计算${}_{25}q^{\;\;2}_{25:50}$。

31. 所给死亡率服从 Gompertz 规律并且 $\mu_x=10^{-4}2^{x/8}$，又由式 (7.7.2) 给出 $\bar{A}^{1}_{40:48:\overline{10}|}=f\bar{A}^{1}_{w:\overline{10}|}$，求 f 与 w。

第八章

多元风险模型

本章主要内容： 本章讨论具有多个终止原因的多元风险模型。本章第二节定义和推导多元风险模型中有关状态未来存续时间和终止原因的概率和分布；第三节在考虑多个因素的同时作用下，分别从概率和生物学的观点分析存续群体的状况；第四节利用伴随单风险模型考虑各种风险的单独作用对存续群体的影响，并讨论多元风险模型与伴随单风险模型的关系；最后，推导了多元风险模型下的趸缴纯保费。

本章主要词汇： 多元风险模型　多元风险表　伴随单风险模型　中心终止率

§8.1　多元风险模型的概念

前一章我们将建立在单一生命状态上的精算理论推广到了包含多个生命的状态，但仅考虑了死亡这一决定未来存续时间的因素。在实际中，往往需要考虑多种影响状态未来存续时间的因素。例如，企业的员工人数会由于辞职、残疾、死亡或退休而减少，且有必要对目前在职人员在未来不同年度内仍在职的人数进行估计。在员工保险计划中，保险给付额依赖于事故的不同性质，如退休给付常常与死亡或残疾给付不同。在伤病收入保险中，被保险人在伤病后可获得定期的给付，而有些伤病收入保险的定期给付额将因导致工作能力丧失的原因不同而不同，如疾病导致的工作能力丧失与事故导致的工作能力丧失可能不同。而且，被保险人可能因为死亡、解约、残疾或期满而终止保险，此时保险人是否给付以及给付多少均因事故不同而不同。

从上面的例子可以看到，除了状态的未来存续时间，我们还应考虑导致状态终止的因

素。本章在单一生命状态保险模型的基础上，将同时考虑导致状态终止的因素并将其视为随机变量，这种模型被称为多元风险模型（multiple decrement models)。那么前面各章所讨论的保险模型可以称为一元风险模型。在多元风险模型中，状态的终止不仅限于被保险人的死亡，也包括解约、退休、残疾及期满等。在精算学中，本章所建立的理论称为多元风险理论（multiple decrement theory)。相应的理论在生物统计学中称为竞争风险理论。

§8.2 存续时间与终止原因的联合分布与边缘分布

我们仍将状态（x）的未来存续时间记为 $T(x)$，或简记为 T。这时 $T(x)$ 表示自状态（x）建立到因某种原因导致其终止时所经过的时间。状态（x）终止的原因记为 $J(x)$，简记为 J。我们将状态终止的原因按自然数顺序编号，这样 J 便是一个离散型随机变量。例如，在员工保险计划中，可令 $J=1$、2、3、4 分别表示状态（x）的终止是由辞职、残疾、死亡或退休所致；在伤病收入保险中，可令 $J=1$、2、3、4 分别表示状态（x）终止的原因为死亡、解约、残疾或期满。可见，J 的取值可根据具体情况自由选择，只需指明其含义即可。

8.2.1 联合分布与边缘分布

随机变量 T 与 J 的分布可由联合概率密度函数 $f(t,j)$ 给出，其中 T 的值域为 $[0,+\infty)$，J 的值域为 $\{1,2,\cdots,m\}$，m 为一自然数。

由联合概率密度函数 $f(t,j)$，我们可以表示如下概率：

由原因 j 导致状态（x）在时间 t 内终止的概率，记为 ${}_tq_x^{(j)}$，显然：

$$
\begin{aligned}
{}_tq_x^{(j)} &= Pr(0 \leqslant T \leqslant t, J=j) \\
&= \int_0^t f(s,j)\,ds \quad (t \geqslant 0, j=1,2,\cdots,m)
\end{aligned}
\tag{8.2.1}
$$

状态（x）在时间 t 前终止的概率，即不论何种原因导致状态（x）在时间 t 前终止的概率，记为 ${}_tq_x^{(\tau)}$，则

$$
\begin{aligned}
{}_tq_x^{(\tau)} &= Pr(T \leqslant t) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\int_0^t f(s,j)\,ds
\end{aligned}
\tag{8.2.2}
$$

状态（x）在时间 t 仍存续的概率记为 ${}_tp_x^{(\tau)}$，则

$$
{}_tp_x^{(\tau)} = 1 - {}_tq_x^{(\tau)} \tag{8.2.3}
$$

状态（x）将由原因 j 导致终止的概率记为 ${}_\infty q_x^{(j)}$，则

$$
\begin{aligned}
{}_\infty q_x^{(j)} &= Pr(T < \infty, J=j) \\
&= \int_0^\infty f(s,j)\,ds \quad (j=1,2,\cdots,m)
\end{aligned}
\tag{8.2.4}
$$

这 m 个概率 ${}_\infty q_x^{(j)}$ 的集合，$(j=1,2,\cdots,m)$，便构成了随机变量 J 的边缘密度函数，记为

$h(j)$，即：

$$h(j) = {}_{\infty}q_x^{(j)} = \int_0^{\infty} f(s,j)\,ds \quad (j = 1,2,\cdots,m)$$

我们记随机变量 T 的边缘密度函数为 $g(t)$，则

$$g(t) = \sum_{j=1}^{m} f(t,j) \tag{8.2.5}$$

由于 $g(t)$ 是边缘密度函数，故

$$\int_0^{\infty} g(t)\,dt = 1$$

记 T 的边缘分布函数为 $G(t)$，那么

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_0^t g(s)\,ds \\ &= \int_0^t \sum_{j=1}^{m} f(s,j)\,ds \\ &= \sum_{j=1}^{m} \int_0^t f(s,j)\,ds \\ &= {}_tq_x^{(\tau)} \end{aligned} \tag{8.2.6}$$

即状态（x）在时刻 t 前终止的概率。

8.2.2 终止力函数

类似于一元风险模型，在多元风险模型中，我们将状态（x）在 $x+t$ 岁的终止力定义为

$$\mu_{x+t}^{(\tau)} = \frac{G'(t)}{1-G(t)} = \frac{g(t)}{1-G(t)} \tag{8.2.7}$$

由式（8.2.6）和式（8.2.3），有

$$\begin{aligned} \mu_{x+t}^{(\tau)} &= \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \cdot \frac{d}{dt}\,{}_tq_x^{(\tau)} \\ &= -\frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \cdot \frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{(\tau)} \\ &= -\frac{d}{dt}\ln {}_tp_x^{(\tau)} \end{aligned} \tag{8.2.8}$$

由上式可解得

$${}_tp_x^{(\tau)} = \exp\left[-\int_0^t \mu_{x+s}^{(\tau)}\,ds\right] \tag{8.2.9}$$

由原因 j 导致状态（x）在 $x+t$ 岁终止的终止力可以定义为

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{f(t,j)}{1-G(t)} = \frac{f(t,j)}{{}_tp_x^{(\tau)}} \tag{8.2.10}$$

于是联合概率密度函数可用精算符号表示为

$$f(t,j) = {}_tp_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)}$$

将式（8.2.1）对 t 求导，得

$$\frac{d}{dt}\,{}_tq_x^{(j)} = f(t,j)$$

于是又可将 $\mu_{x+t}^{(j)}$ 表示为

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \cdot \frac{d}{dt}\, {}_tq_x^{(j)} \tag{8.2.11}$$

由式（8.2.1）和式（8.2.2）可得

$${}_tq_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^{(j)} \tag{8.2.12}$$

两边对 t 求导并除以 ${}_tp_x^{(\tau)}$ 便得

$$\mu_{x+t}^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} \mu_{x+t}^{(j)} \tag{8.2.13}$$

式（8.2.12）和式（8.2.13）表明各种原因导致状态终止的概率及各种原因产生的终止力都具有可加性，它们的和分别为终止概率和终止力。

由式（8.2.10）和式（8.2.13）可得

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{j=1}^{m} f(t,j) = \sum_{j=1}^{m} {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)} = {}_tp_x^{(\tau)} \sum_{j=1}^{m} \mu_{x+t}^{(j)} \\ &= {}_tp_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(\tau)} \end{aligned}$$

若已知状态（x）在 t 时刻终止，则 J 的条件密度函数为

$$\begin{aligned} h(j \mid T = t) &= \frac{f(t,j)}{g(t)} \\ &= \frac{{}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}}{{}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(\tau)}} \\ &= \frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}^{(\tau)}} \quad (j = 1,2,\cdots,m) \end{aligned} \tag{8.2.14}$$

至此，我们已把 T 和 J 的联合概率密度函数、边缘密度函数和条件密度函数用精算符号表示出来，现将其概括如下：

$$\begin{aligned} f(t,j) &= {}_tp_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)} \\ g(t) &= {}_tp_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(\tau)} \\ h(j) &= {}_\infty q_x^{(j)} \\ h(j \mid T = t) &= \frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}^{(\tau)}} \end{aligned}$$

下面来看两个例题。

[例 8.2.1] 考虑具有两个终止原因的多元风险模型，其终止力如下：

$$\mu_{x+t}^{(1)} = \frac{t}{100}, \mu_{x+t}^{(2)} = \frac{1}{100}, \quad (t \geqslant 0)$$

求该模型的联合密度函数、边缘密度函数和条件密度函数。

解：先求 $\mu_{x+t}^{(\tau)}$ 与 ${}_tp_x^{(\tau)}$。

$$\mu_{x+t}^{(\tau)} = \mu_{x+t}^{(1)} + \mu_{x+t}^{(2)} = \frac{t+1}{100}$$

$$\begin{aligned} {}_tp_x^{(\tau)} &= \exp\left[-\int_0^t \frac{s+1}{100} ds\right] \\ &= \exp[-(t^2 + 2t)/200] \qquad (t \geqslant 0) \end{aligned}$$

于是 T 和 J 的联合密度函数为

$$f(t,j)=\begin{cases}\dfrac{t}{100}\exp[-(t^2+2t)/200] & (t\geqslant 0,j=1)\\ \dfrac{1}{100}\exp[-(t^2+2t)/200] & (t\geqslant 0,j=2)\end{cases}$$

T 的边缘密度函数为

$$g(t)=\sum_{j=1}^{2}f(t,j)=\frac{t+1}{100}\exp[-(t^2+2t)/200]\quad(t\geqslant 0)$$

J 的边缘密度函数为

$$h(j)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty f(t,1)\,dt & (j=1)\\ \displaystyle\int_0^\infty f(t,2)\,dt & (j=2)\end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned}h(2)&=\int_0^\infty\frac{1}{100}\exp[-(t^2+2t)/200]\,dt\\&=\frac{1}{100}e^{0.005}\int_0^\infty\exp[-(t+1)^2/200]\,dt\\&=\frac{1}{100}e^{0.005}\sqrt{2\pi}\cdot 10\int_0^\infty\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}\exp[-(t+1)^2/200]\,dt\\&=\frac{1}{10}e^{0.005}\sqrt{2\pi}\int_{0.1}^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-z^2/2)\,dz\\&=\frac{1}{10}e^{0.005}\sqrt{2\pi}[1-\Phi(0.1)]\\&=0.1159\end{aligned}$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，从而

$$h(1)=1-0.1159=0.8841$$

最后求得已知状态在 t 时刻终止的 J 的条件密度函数

$$h(j\mid t)=\begin{cases}\dfrac{\mu_{x+t}^{(1)}}{\mu_{x+t}^{(\tau)}}=\dfrac{t}{t+1} & (j=1)\\ \dfrac{\mu_{x+t}^{(2)}}{\mu_{x+t}^{(\tau)}}=\dfrac{1}{t+1} & (j=2)\end{cases}$$

[例 8.2.2] 在上题所给条件下，求 $E(T)$ 和 $E(T|J=2)$。

解：

$$\begin{aligned}E(T)&=\int_0^\infty t\cdot g(t)\,dt=\int_0^\infty t\left\{\frac{t+1}{100}\exp[-(t^2+2t)/200]\right\}dt\\&=-t\cdot\exp[-(t^2+2t)/200]\Big|_0^\infty+\int_0^\infty\exp[-(t^2+2t)/200]\,dt\\&=0+100h(2)\\&=11.59\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[T\mid J=2]&=\int_0^\infty t\frac{f(t,2)}{h(2)}\,dt\\&=\frac{1}{0.1159}\int_0^\infty t\{100^{-1}\exp[-(t^2+2t)/200]\}\,dt\end{aligned}$$

$$= \frac{h(1)}{0.1159}$$
$$= 7.63$$

由以上两个例子可以看出，只要确定了 T 和 J 的联合密度函数，相应的边缘分布、条件分布、矩和条件矩等均可以由此求得。

8.2.3 存续整年数与终止原因的联合分布

最后我们看看状态（x）未来存续整年数 $K=[T]$ 与终止原因 J 的联合分布。K 和 J 的联合分布可表示为

$$\begin{aligned} Pr[K=k,J=j] &= Pr[k\leqslant T<k+1,J=j] \\ &= \int_k^{k+1} {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}dt \\ &\overset{t=k+s}{=} {}_kp_x^{(\tau)}\int_0^1 {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\mu_{x+k+s}^{(j)}ds \\ &= {}_kp_x^{(\tau)}q_{x+k}^{(j)} \end{aligned} \tag{8.2.15}$$

其中

$$q_{x+k}^{(j)} = \int_0^1 {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\mu_{x+k+s}^{(j)}ds \tag{8.2.16}$$

为已知状态（x）存续到 $x+k$ 岁后由原因 j 导致其在下一年内终止的概率。而其在下一年内终止的概率为

$$\begin{aligned} q_{x+k}^{(\tau)} &= \int_0^1 {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\mu_{x+k+s}^{(\tau)}ds \\ &= \int_0^1 {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\sum_{j=1}^{m}\mu_{x+k+s}^{(j)}ds \\ &= \sum_{j=1}^{m} q_{x+k}^{(j)} \end{aligned} \tag{8.2.17}$$

从式（8.2.17）可以看出，若状态（x）在 $x+k$ 岁至 $x+k+1$ 岁之间的终止概率保持不变，则由某一原因导致终止的概率将会因由其他原因导致终止的概率的增加而减小。这就是多元风险理论也被称为竞争风险理论的原因。

§8.3 随机存续群体与确定存续群体

与一元风险模型类似，在多元风险模型中，我们也可以从两种不同的观点来看待一个群体。从概率论的观点来看，对于一个群体，在未来某一时刻仍在群体中的人数和在未来某一段时间内离开群体的人数都是随机变量，是无法事先确定的，因此，只有通过数学期望来反映群体人数的变化才有意义。在这个观点下，我们把所考察的群体称为随机存续群体。而从生物学的观点来看，一个群体的人数将受某些负增长因素或某一综合负增长因素的影响而不断减少。未来某一时刻群体的人数和未来某一段时间内离开群体的人数均可由该群体的初始人数和负增长因素确定。在这个观点下，我们把所考察的群体称为确定存续

群体。

下面我们分别从这两种观点出发来讨论问题。

8.3.1 随机存续群体

考虑一个由 $l_a^{(\tau)}$个年龄为 a 岁的人组成的群体，其中每个人在未来离开该群体的时间和原因的联合分布由密度函数

$$f(t,j) = {}_tp_a^{(\tau)} \cdot \mu_{a+t}^{(j)} \quad (t \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,m)$$

确定。在 x 岁到 $x+n$ 岁之间，由于原因 j 而将离开群体的人数是一个随机变量，记为 ${}_nD_x^{(j)}$，$x \geqslant a$。其数学期望记作 ${}_nd_x^{(j)}$，则

$$\begin{aligned} {}_nd_x^{(j)} &= E[{}_nD_x^{(j)}] \\ &= l_a^{(\tau)} Pr(x-a < T \leqslant x+n-a, J=j) \\ &= l_a^{(\tau)} \int_{x-a}^{x+n-a} {}_tp_a^{(\tau)} \mu_{a+t}^{(j)} dt \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

当 $n=1$ 时，我们将 ${}_nD_x^{(j)}$ 和 ${}_nd_x^{(j)}$ 分别简记为 $D_x^{(j)}$ 和 $d_x^{(j)}$。在 x 岁到 $x+n$ 岁之间将离开群体的人数记为 ${}_nD_x^{(\tau)}, x \geqslant a$。

由于

$${}_nD_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} {}_nD_x^{(j)}$$

从而可得其数学期望

$$\begin{aligned} {}_nd_x^{(\tau)} &= E[{}_nD_x^{(\tau)}] \\ &= \sum_{j=1}^{m} {}_nd_x^{(j)} \end{aligned} \tag{8.3.2}$$

将式（8.3.1）代入，得

$${}_nd_x^{(\tau)} = l_a^{(\tau)} \sum_{j=1}^{m} \int_{x-a}^{x+n-a} {}_tp_a^{(\tau)} \mu_{a+t}^{(j)} dt \tag{8.3.3}$$

到 x 岁时仍在该群体的人数也是一个随机变量，记为 $L^{(\tau)}(x)$。其数学期望记作 $l_x^{(\tau)}$，则

$$\begin{aligned} l_x^{(\tau)} &= E[L^{(\tau)}(x)] \\ &= l_a^{(\tau)} \cdot {}_{x-a}p_a^{(\tau)} \end{aligned} \tag{8.3.4}$$

在式（8.3.1）中令 $n=1$ 及 $s=t-(x-a)$，得到在 x 岁到 $x+1$ 岁之间由于原因 j 而离开群体的人数的均值

$$\begin{aligned} d_x^{(j)} &= l_a^{(\tau)} \int_0^1 {}_{s+x-a}p_a^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(j)} ds \\ &= l_a^{(\tau)} {}_{x-a}p_a^{(\tau)} \int_0^1 {}_sp_x^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(j)} ds \end{aligned}$$

由式（8.3.4）和式（8.2.16）得

$$d_x^{(j)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(j)} \tag{8.3.5}$$

通过式（8.3.4）和式（8.3.5），我们可以从给定的 $l_a^{(\tau)}$ 和 $q_x^{(j)}$ 的数值表得到相应的关于 $l_x^{(\tau)}$ 和 $d_x^{(j)}$ 的数值表。这两种表都被称为多元风险表。

[例 8.3.1] 设 $l_{65}^{(\tau)}=1000$，根据表 8－1 构造关于 $l_x^{(\tau)}$ 和 $d_x^{(j)}$ 的数值表。

表 8－1 $q_x^{(1)}$、$q_x^{(2)}$ 数值表

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$
65	0.02	0.05
66	0.03	0.06
67	0.04	0.07
68	0.05	0.08
69	0.06	0.09
70	0.00	1.00

解：由 $q_x^{(\tau)} = q_x^{(1)} + q_x^{(2)}, p_x^{(\tau)} = 1 - q_x^{(\tau)}$ 及式（8.3.4）和式（8.3.5）可得如下多元风险表（见表 8－2）。

表 8－2 多元风险表

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(\tau)}$	$p_x^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)} = l_{x-1}^{(\tau)} p_{x-1}^{(\tau)}$	$d_x^{(1)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(1)}$	$d_x^{(2)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(2)}$
65	0.02	0.05	0.07	0.93	1000.00	20.00	50.00
66	0.03	0.06	0.09	0.91	930.00	27.90	55.80
67	0.04	0.07	0.11	0.89	846.30	33.85	59.24
68	0.05	0.08	0.13	0.87	753.21	37.66	60.26
69	0.06	0.09	0.15	0.85	655.29	39.32	58.98
70	0.00	1.00	1.00	0.00	557.00	0.00	557.00

注意 $l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - d_x^{(1)} - d_x^{(2)}$，它可作为表中最后三栏数值计算的检验，但舍入误差的存在是可能的。

利用上表中的数值，我们可以把由基本原理求得的某些概率与由表 8－2 中最后三栏求得的这些概率作比较。由基本原理求得如下概率：

$$_2p_{65}^{(\tau)} = p_{65}^{(\tau)} p_{66}^{(\tau)} = (0.93)(0.91) = 0.8463$$

$$_{2|}q_{66}^{(1)} = p_{66}^{(\tau)} p_{67}^{(\tau)} q_{68}^{(1)} = (0.91)(0.89)(0.05) = 0.0405$$

$$_2q_{67}^{(2)} = q_{67}^{(2)} + p_{67}^{(\tau)} q_{68}^{(2)} = 0.07 + (0.89)(0.08) = 0.1412$$

由表中最后三栏求得相应的概率如下：

$$_2p_{65}^{(\tau)} = \frac{l_{67}^{(\tau)}}{l_{65}^{(\tau)}} = \frac{846.30}{1000.00} = 0.8463$$

$$_{2|}q_{66}^{(1)} = \frac{d_{68}^{(1)}}{l_{66}^{(\tau)}} = \frac{37.66}{930.00} = 0.0405$$

$$_2q_{67}^{(2)} = \frac{d_{67}^{(2)} + d_{68}^{(2)}}{l_{67}^{(\tau)}} = \frac{59.24 + 60.26}{846.30} = 0.1412$$

两种方法得出的结果在四位小数上是相同的。

例 8.3.1 中的原因 1 可当作死亡，原因 2 可当作退休。这里，70 岁可看成限定退休年龄，届时所有该群体中仍存在的人将全部退休。

8.3.2 确定存续群体

下面我们将从给定生命表来看存续群体。考虑一个由 $l_a^{(\tau)}$ 个 a 岁的人组成的群体，在未来某一年龄 x，群体中仍存续的人数 $l_x^{(\tau)}$ 由年终止率 $q_a^{(\tau)}$，$q_{a+1}^{(\tau)}$，…，$q_{x-1}^{(\tau)}$ 确定。

$$
\begin{aligned}
l_x^{(\tau)} &= l_a^{(\tau)}(1-q_a^{(\tau)})(1-q_{a+1}^{(\tau)})\cdots(1-q_{x-1}^{(\tau)}) \\
&= l_a^{(\tau)}p_a^{(\tau)}p_{a+1}^{(\tau)}\cdots p_{x-1}^{(\tau)} \\
&= l_a^{(\tau)}\ {}_{x-a}p_a^{(\tau)}
\end{aligned}
$$

上式便对应着随机存续群体中的式（8.3.4）。如果群体中每个人在未来年龄 y 岁离开群体的终止力为 $\mu_y^{(\tau)}, y \geqslant a$，那么

$$
\begin{aligned}
l_x^{(\tau)} &= l_a^{(\tau)}\ {}_{x-a}p_a^{(\tau)} \\
&= l_a^{(\tau)}\exp\left[-\int_a^x \mu_y^{(\tau)}dy\right]
\end{aligned}
\tag{8.3.6}
$$

在 x 岁到 $x+1$ 岁之间离开群体的人数 $d_x^{(\tau)}$ 可由下式确定

$$
\begin{aligned}
d_x^{(\tau)} &= l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)} \\
&= l_x^{(\tau)}\left[1-\frac{l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}\right] \\
&= l_x^{(\tau)}\left\{1-\exp\left[-\int_x^{x+1}\mu_y^{(\tau)}dy\right]\right\} \\
&= l_x^{(\tau)}[1-p_x^{(\tau)}] \\
&= l_x^{(\tau)}q_x^{(\tau)}
\end{aligned}
\tag{8.3.7}
$$

在随机存续群体中，在式（8.3.2）中取 $n=1$，通过式（8.3.5）和式（8.2.12）也可得到与式（8.3.7）相应的式子。

将式（8.3.6）取对数并对 x 求导，得

$$
\mu_x^{(\tau)} = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{dl_x^{(\tau)}}{dx} \tag{8.3.8}
$$

上面这些公式与第一章中有关生命表函数的公式相似。不过这里群体中的人数是由综合负增长率（包括多个终止原因）$q_x^{(\tau)}$ 或与之等价的终止力 $\mu_y^{(\tau)}(x \leqslant y \leqslant x+1)$ 确定的，而不是仅由一元风险模型中的单一负增长率（死亡率）或与之等价的死力确定。

现在假设有 m 个终止原因，在 x 岁时群体中的 $l_x^{(\tau)}$ 个仍存续的人将由于这 m 个原因在未来全部离开群体。这样我们可以将 $l_x^{(\tau)}$ 个人划分为 m 个子群，各子群的人数分别为 $l_x^{(j)}(j=1,2,\cdots,m)$，其中 $l_x^{(j)}$ 表示将由原因 j 而离开群体的人数。显然

$$
l_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} l_x^{(j)} \tag{8.3.9}
$$

定义在年龄 x 岁时对于原因 j 的终止力为

$$
\mu_x^{(j)} = \lim_{t\to 0}\frac{l_x^{(j)} - l_{x+t}^{(j)}}{t\cdot l_x^{(\tau)}}
$$

注意，分母中用的是 $l_x^{(\tau)}$ 而不是 $l_x^{(j)}$。即

$$
\mu_x^{(j)} = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{dl_x^{(j)}}{dx} \tag{8.3.10}
$$

由式 (8.3.8) ~式 (8.3.10) 得

$$\mu_x^{(\tau)} = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{d}{dx}\sum_{j=1}^{m} l_x^{(j)} = \sum_{j=1}^{m}\mu_x^{(j)} \tag{8.3.11}$$

将式 (8.3.10) 中的 x 换成 y，改写成

$$-dl_y^{(j)} = l_y^{(\tau)}\mu_y^{(j)}dy$$

两边从 $y=x$ 到 $y=x+1$ 积分，得

$$l_x^{(j)} - l_{x+1}^{(j)} = \int_x^{x+1} l_y^{(\tau)}\mu_y^{(j)}dy$$

于是

$$d_x^{(j)} = \int_x^{x+1} l_y^{(\tau)}\mu_y^{(j)}dy \tag{8.3.12}$$

两边对 j 求和，由式 (8.3.11) 便得

$$d_x^{(\tau)} = \int_x^{x+1} l_y^{(\tau)}\mu_y^{(\tau)}dy \tag{8.3.13}$$

最后，在式 (8.3.12) 两边除以 $l_x^{(\tau)}$，得

$$\frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} = \int_x^{x+1} {}_{y-x}p_x^{(\tau)}\mu_y^{(j)}dy = q_x^{(j)} \tag{8.3.14}$$

其中 $q_x^{(j)}$ 是在所有 m 个终止原因都起作用的情况下，$l_x^{(\tau)}$ 个存续者中在 x 岁到 $x+1$ 岁之间由原因 j 而离开群体的人数比率。

可见，确定存续群体为多元风险理论提供了另一种描述方法和理论结构，它类似于生命表的情形。

§8.4 伴随单风险模型和多元风险表的构造

在一元风险模型中，我们仅考虑一种风险（如死亡）导致状态在一定时间内终止的概率。而在多元风险模型中，我们考虑的是各种风险同时发生作用的情形，某种风险导致状态终止的可能性会因其他风险的存在而改变。譬如，在保险期限内，寿险合同可能因死亡或退保这两种原因而终止。由于退休可能发生在死亡之前，因此因死亡而导致的寿险合同终止的概率会因退保的存在而减小；同样，死亡也可能发生在退保之前，则因退保导致寿险合同终止的概率也会因死亡的存在而减小。在多元风险模型中，这些对导致状态终止的概率产生相互影响的风险称为竞争风险。在竞争风险的环境下，我们只能看到这些风险对状态的终止产生的总作用，而很难看到某个终止原因的单独作用。例如，在员工保险计划中，由于退休、残疾和自愿解约的存在而不能直接看出死亡率有多大的影响。为了考虑各种风险的单独作用对存续函数 ${}_tp_x^{(\tau)}$ 和年终止概率 $q_x^{(\tau)}$ 所造成的影响，我们可以就特定的风险定义单风险模型，称之为伴随单风险模型。该模型只依赖这个特定的风险（称为伴随风险）。

8.4.1 伴随单风险模型中的函数

在考虑第 j 个终止原因的单独作用时，相应的终止力 $\mu_x^{(j)}$ 是最基本的因素。我们将在这个基础上定义其他函数。我们将

$$ {}_tp_x'^{(j)} = \exp\left[-\int_0^t \mu_{x+s}^{(j)} ds\right] \tag{8.4.1}$$

称为伴随单风险生存函数，它表示状态 (x) 在 t 时刻前不由第 j 个原因导致终止的概率。

在一元风险模型中，生存概率 ${}_tp_x$ 是一个生存函数，因为 $\lim_{t\to\infty} {}_tp_x = 0$。但在有 m 个终止原因的竞争风险环境中，并不一定对于某个特定的终止原因 j 有 $\lim_{t\to\infty} {}_tp_x'^{(j)} = 0$。因此在伴随单风险模型中 ${}_tp_x'^{(j)}$ 不一定是一个存续函数；而在多元风险模型中，因为 ${}_tp_x^{(\tau)}$ 是一个存续函数，$\lim_{t\to\infty} {}_tp_x^{(\tau)} = 0$。

又因为，

$$\begin{aligned} {}_tp_x^{(\tau)} &= \exp\left[-\int_0^t \mu_{x+s}^{(\tau)} ds\right] \\ &= \exp\left\{-\int_0^t [\mu_{x+s}^{(1)} + \mu_{x+s}^{(2)} + \cdots + \mu_{x+s}^{(m)}] ds\right\} \\ &= \prod_{j=1}^m {}_tp_x'^{(j)} \end{aligned} \tag{8.4.2}$$

可见至少存在一个终止原因 j，使得 $\lim_{t\to\infty} {}_tp_x'^{(j)} = 0$。

我们定义

$$ {}_tq_x'^{(j)} = 1 - {}_tp_x'^{(j)} \tag{8.4.3}$$

为独立终止率，它表示在没有其他原因的影响时，由第 j 个原因导致状态 (x) 在 t 时刻前终止的概率。“独立”一词反映了在确定 ${}_tq_x'^{(j)}$ 时只考虑原因 j 的作用而不考虑其他竞争原因的影响。为了区别由原因 j 先于其他原因导致状态 (x) 在 t 时刻前终止的概率 ${}_tq_x^{(j)}$，我们对 ${}_tq_x'^{(j)}$ 使用终止率（rate）而不用终止概率（probability）。

根据式（8.4.2），有 ${}_tp_x'^{(j)} \geq {}_tp_x^{(\tau)}$，

所以有

$$ {}_tp_x'^{(j)} \mu_{x+t}^{(j)} \geq {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} $$

将上式两端从 0 到 1 积分便得

$$ q_x'^{(j)} = \int_0^1 {}_tp_x'^{(j)} \mu_{x+t}^{(j)} dt \geq \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt = q_x^{(j)} $$

即第 j 种原因导致状态终止的概率会因其他原因的作用（先于原因 j 发生）而减小。

此外，显然

$$ q_x'^{(j)} = 1 - p_x'^{(j)} \leq 1 - p_x^{(\tau)} = q_x^{(\tau)} $$

这说明状态终止的概率会因为原因 j 之外其他原因的作用而增大。

多元风险模型中有一个函数与其伴随单风险模型中相应的函数很相似，这就是中心终止率（central rate of decrement）。类似于第一章的定义，我们定义

$$m_x^{(\tau)} = \frac{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(\tau)}dt}{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}dt} \tag{8.4.4}$$

为全中心终止率，它是终止力 $\mu_{x+t}^{(\tau)}$ 在 x 到 $x+1$ 上的加权平均值；定义相应于原因 j 的中心终止率为

$$m_x^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}dt}{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}dt} \tag{8.4.5}$$

它是终止力 $\mu_{x+t}^{(j)}$ 在 x 到 $x+1$ 之间的加权平均值。显然

$$m_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} m_x^{(j)}$$

而在伴随单风险模型中，我们定义相应的中心终止率为

$$m_x'^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_tp_x'^{(j)}\mu_{x+t}^{(j)}dt}{\int_0^1 {}_tp_x'^{(j)}dt} \tag{8.4.6}$$

它也是终止力 $\mu_{x+t}^{(j)}$ 在 x 到 $x+1$ 上的加权平均值，不过这里所用的权数是 ${}_tp_x'^{(j)}$ 而不是 ${}_tp_x^{(\tau)}$。

8.4.2　特殊假设下的独立终止率

若假设相应于各终止原因的终止力在各年龄内均为常数，即

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \mu_x^{(j)} \quad (0 \leqslant t < 1, j = 1,2,\cdots,m)$$

则显然有

$$\mu_{x+t}^{(\tau)} = \mu_x^{(\tau)} \quad (0 \leqslant t < 1)$$

于是

$$\begin{aligned} q_x^{(j)} &= \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(j)}dt \\ &= \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}}\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(\tau)}dt \\ &= \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}}q_x^{(\tau)} \\ &= \frac{\ln p_x'^{(j)}}{\ln p_x^{(\tau)}}\, q_x^{(\tau)} \end{aligned} \tag{8.4.7}$$

因此，

$$q_x'^{(j)} = 1 - [1 - q_x^{(\tau)}]^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}} \tag{8.4.8}$$

需要注意的是，上式的推导中应假设 $p_x'^{(j)}$ 和 $p_x^{(\tau)}$ 不等于 0。

现在我们假设在多元风险模型中，各种终止事件的发生于各年龄间服从均匀分布，即

$${}_tq_x^{(j)} = t \cdot q_x^{(j)} \quad (0 \leqslant t < 1, j = 1,2,\cdots,m)$$

显然也有

$${}_tq_x^{(\tau)} = t \cdot q_x^{(\tau)} \quad (0 \leqslant t < 1)$$

由式（8.2.11），有

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \cdot \frac{d}{dt}{}_tq_x^{(j)}$$
$$= \frac{1}{1 - t \cdot q_x^{(\tau)}} \cdot \frac{d}{dt}(t \cdot q_x^{(j)})$$
$$= \frac{q_x^{(j)}}{1 - t \cdot q_x^{(\tau)}}$$

于是

$$q_x'^{(j)} = 1 - \exp\left[-\int_0^1 \mu_{x+t}^{(j)} dt\right]$$
$$= 1 - \exp\left[-\int_0^1 \frac{q_x^{(j)}}{1 - t \cdot q_x^{(\tau)}} dt\right]$$
$$= 1 - \exp\left[\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}} \ln(1 - q_x^{(\tau)})\right]$$

即式（8.4.8）。可见，在这两种假设下，由终止概率得到的独立终止率是相同的。

由各年龄的独立终止率构成的数值表就称为伴随单风险表。

[例 8.4.1] 根据例 8.3.1 所给 $q_x^{(1)}$ 和 $q_x^{(2)}$ 的值，利用公式（8.4.8）计算相应的 $q_x'^{(1)}$、$q_x'^{(2)}$ 的值。

解： 利用公式（8.4.2），可求得相应的 $q_x'^{(1)}$ 和 $q_x'^{(2)}$ 的值如表 8-3。

表 8-3 $q_x^{(j)}$、$q_x'^{(j)}$ 数值表

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x'^{(1)}$	$q_x'^{(2)}$
65	0.02	0.05	0.02052	0.05052
66	0.03	0.06	0.03095	0.06094
67	0.04	0.07	0.04149	0.07147
68	0.05	0.08	0.05215	0.08213
69	0.06	0.09	0.06294	0.09291
70	0.00	1.00	—	—

要说明的是：虽然可以根据 $q_{70}^{(1)}$、$q_{70}^{(2)}$ 求得 $q_{70}'^{(1)}$ 和 $q_{70}'^{(2)}$，但由于 70 岁为限定退休年龄，因此此时已无必要考虑 $q_{70}'^{(1)}$ 和 $q_{70}'^{(2)}$ 了。

8.4.3 特殊假设下的终止概率

上面讲述了利用多元风险表在一定的假设下构造伴随风险表的过程。当我们在竞争风险的环境中进行统计工作时，所获得的数据只能直接用于估计终止概率 $q_x^{(j)}$ 。如果想要了解各终止原因或某个终止原因的单独作用（如单纯的死亡率），就需要运用上一节中的方法。反过来，有时候我们也许只能获得伴随单风险模型的独立终止率 $q_x'^{(j)}$，$(j = 1, 2, \cdots, m)$，当需要了解竞争风险环境中各种终止事件在一定时间内发生的概率，就要通过伴随风险表构造多元风险表。做这一项工作首先要做出适当的假设。

由上一节我们知道，若假设各终止力在各年龄内均为常数或多元风险模型中各终止事件的发生在各年龄内服从均匀分布，则可以得到式（8.4.7）。将式（8.4.2）代入式(8.4.7)，有

$$\begin{aligned} q_x^{(j)} &= \frac{\ln p_x'^{(j)}}{\ln \prod_{j=1}^{m} p_x'^{(j)}}\left[1 - \prod_{j=1}^{m} p_x'^{(j)}\right] \\ &= \frac{\ln[1 - q_x'^{(j)}]}{\sum_{j=1}^{m} \ln[1 - q_x'^{(j)}]}\left[1 - \prod_{j=1}^{m}(1 - q_x'^{(j)})\right] \end{aligned} \tag{8.4.9}$$

这就是在所述假设下由独立终止率计算终止概率的公式。

[例 8.4.2] 设下面所给的伴随单风险表适合所考虑的群体，其中原因 3 表示退休，退休可发生在 65 岁至 70 岁之间，70 岁为限定退休年龄。利用式（8.4.2）和式（8.4.9），根据表 8－4 中所给的独立终止率构造相应的多元风险表。

表 8－4 $q_x'^{(j)}$ 数值表

x	$q_x'^{(1)}$	$q_x'^{(2)}$	$q_x'^{(3)}$
65	0.020	0.02	0.04
66	0.025	0.02	0.06
67	0.030	0.02	0.08
68	0.035	0.02	0.10
69	0.040	0.02	0.12

解：将式（8.4.2）改写成

$$q_x^{(\tau)} = 1 - \prod_{j=1}^{3}(1 - q_x'^{(j)})$$

可求得对应于各年龄的 $q_x^{(\tau)}$；利用式（8.4.9）可分别求得对应于各年龄的 $q_x^{(1)}$、$q_x^{(2)}$ 和 $q_x^{(3)}$；因为 70 岁为限定退休年龄，所以 $q_{70}^{(\tau)} = q_{70}^{(3)} = 1$，$q_{70}^{(1)} = q_{70}^{(2)} = 0$。所得数据列于表 8－5，即为所求的多元风险表：

表 8－5 $q_x^{(j)}$ 数值表

x	$q_x^{(\tau)}$	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$
65	0.07802	0.01940	0.01940	0.03921
66	0.10183	0.02401	0.01916	0.05867
67	0.12545	0.02851	0.01891	0.07803
68	0.14887	0.03290	0.01866	0.09731
69	0.17210	0.03720	0.01841	0.11649
70	1.00000	0.00000	0.00000	1.00000

表中数据可以用 $q_x^{(1)} + q_x^{(2)} + q_x^{(3)} = q_x^{(\tau)}$ 进行检验计算是否有误，但可能存在舍入误差。

需要注意的是，在式（8.4.9）中我们要求 $p_x'^{(j)} \neq 0$，（$j = 1, 2, \cdots, m$）。当某个

$p_x'^{(j)}=0$或 $p_x^{(\tau)}=0$ 时，我们需要考虑其他方法。处理这种问题的一个方法是：在各伴随单风险模型中，假设终止事件于各年龄内服从均匀分布，而不是假设在多元风险模型中各终止事件于各年龄内服从均匀分布，即

$$_tq_x'^{(j)} = t \cdot q_x'^{(j)} \quad (0 \leqslant t < 1, j = 1,2,\cdots,m)$$

从而

$$\begin{aligned} {}_tp_x'^{(j)}\mu_{x+t}^{(j)} &= \frac{d}{dt}(-{}_tp_x'^{(j)}) \\ &= \frac{d}{dt}{}_tq_x'^{(j)} \\ &= \frac{d}{dt}(t \cdot q_x'^{(j)}) \\ &= q_x'^{(j)} \end{aligned}$$

于是可得

$$\begin{aligned} q_x^{(j)} &= \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}dt \\ &= \int_0^1 \prod_{i=1}^m {}_tp_x'^{(i)} \frac{q_x'^{(j)}}{{}_tp_x'^{(j)}}dt \\ &= \int_0^1 q_x'^{(j)} \prod_{i\neq j} {}_tp_x'^{(i)}dt \\ &= q_x'^{(j)}\int_0^1 \prod_{i\neq j}(1 - t \cdot q_x'^{(i)})dt \end{aligned} \tag{8.4.10}$$

上式中被积函数是一个关于 t 的多项式，可以直接进行积分运算，但在 m 较大时计算比较繁琐。

[例 8.4.3] 在例 8.4.2 所给伴随风险表中，假定各终止事件在各年龄内的发生均服从均匀分布，试利用式（8.4.2）和式（8.4.10）构造多元风险表。

解：$q_x^{(\tau)}$ 的值与例 8.4.2 相同；利用式（8.4.10）可得

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} &= q_x'^{(1)}\int_0^1(1 - tq_x'^{(2)})(1 - tq_x'^{(3)})dt \\ &= q_x'^{(1)}\left[1 - \frac{1}{2}(q_x'^{(2)} + q_x'^{(3)}) + \frac{1}{3}q_x'^{(2)}q_x'^{(3)}\right] \end{aligned}$$

同样地，对于 $q_x^{(2)}$ 和 $q_x^{(3)}$ 我们可以得到类似的结果，并将所算数据列于表 8-6：

表 8-6　　$q_x^{(j)}$ 数值表

x	$q_x^{(\tau)}$	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$
65	0.07802	0.01941	0.01941	0.03921
66	0.10183	0.02401	0.01916	0.05866
67	0.12545	0.02852	0.01892	0.07802
68	0.14887	0.03292	0.01867	0.09727
69	0.17210	0.03723	0.01843	0.11643

表 8.6 中终止概率的值与例 8.4.2 中用式（8.4.9）所算出的值很接近（见表 8.5）。表中数据亦可用 $q_x^{(1)}+q_x^{(2)}+q_x^{(3)}=q_x^{(\tau)}$ 来检验，除舍入误差外应相符。

在例 8.4.2 和例 8.4.3 中，$q_x^{(\tau)}$ 的值与假设无关，不同的假设只是导致终止概率 $q_x^{(\tau)}$ 在各种原因相应的终止概率 $q_x^{(1)}$、$q_x^{(2)}$ 和 $q_x^{(3)}$ 之间的分配不同。

[例 8.4.4] 考虑具有三个终止原因的情形。假设其中死亡和残疾在各自的伴随单风险模型中于各年龄间服从均匀分布，相应的独立终止率分别为 $q_x'^{(1)}$ 和 $q_x'^{(2)}$。(1) 若假设解约只发生在年末且具有独立终止率 $q_x'^{(3)}$，试求在年龄 x 至 $x+1$ 岁间相应于三个终止原因的终止概率；(2) 在伴随单风险模型中，若假设解约将以均等的概率 $\frac{q_x'^{(3)}}{2}$ 分别发生在年中 $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 和年末，试求三个终止原因的终止概率。

解：(1) 显然 ${}_tp_x^{(\tau)}$ 在 $t=1$ 处间断。因为 $\lim\limits_{t\to1^-} {}_tp_x'^{(3)} = 1$ 和 $p_x'^{(3)} = 1 - q_x'^{(3)}$，所以由 ${}_tp_x^{(\tau)} = {}_tp_x'^{(1)}\,{}_tp_x'^{(2)}\,{}_tp_x'^{(3)}$ 得

$$\lim_{t\to1^-} {}_tp_x^{(\tau)} = p_x'^{(1)}p_x'^{(2)}$$

$$p_x^{(\tau)} = p_x'^{(1)}p_x'^{(2)}(1 - q_x'^{(3)})$$

而

$$q_x^{(\tau)} = 1 - p_x^{(\tau)} = 1 - p_x'^{(1)}p_x'^{(2)}(1 - q_x'^{(3)})$$

因此

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} &= \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(1)}dt \\ &= \int_0^1 {}_tp_x'^{(1)}\,{}_tp_x'^{(2)}\mu_{x+t}^{(1)}dt \\ &= q_x'^{(1)}\int_0^1 (1 - t\cdot q_x'^{(2)})\,dt \\ &= q_x'^{(1)}\left[1 - \frac{1}{2}q_x'^{(2)}\right] \end{aligned}$$

类似地，我们有

$$q_x^{(2)} = q_x'^{(2)}\left[1 - \frac{1}{2}q_x'^{(1)}\right]$$

与连续情形相同，仍有

$$q_x^{(\tau)} = q_x^{(1)} + q_x^{(2)} + q_x^{(3)}$$

所以

$$\begin{aligned} q_x^{(3)} &= q_x^{(\tau)} - q_x^{(1)} - q_x^{(2)} \\ &= 1 - p_x'^{(1)}p_x'^{(2)}(1 - q_x'^{(3)}) - q_x'^{(1)} - q_x'^{(2)} + q_x'^{(1)}q_x'^{(2)} \end{aligned}$$

又因为

$$1 - q_x'^{(1)} - q_x'^{(2)} + q_x'^{(1)}q_x'^{(2)} = p_x'^{(1)}p_x'^{(2)}$$

所以

$$q_x^{(3)} = p_x'^{(1)}p_x'^{(2)}q_x'^{(3)}$$

由于

$$\lim_{t\to1^+} {}_tp_x^{(\tau)} - \lim_{t\to1^-} {}_tp_x^{(\tau)} = q_x^{(3)}$$

所以 ${}_tp_x^{(\tau)}$ 在 $t=1$ 处的跃度等于 $q_x^{(3)}$。

(2) 由假设可知 ${}_tp_x^{(\tau)}$ 在 $t=\frac{1}{2}$ 和 $t=1$ 处间断，因此不妨考虑积分区间 $\left[0,\ \frac{1}{2}\right)$ 和 $\left[\frac{1}{2},\ 1\right)$，

$$q_x^{(1)} = q_x'^{(1)}\int_0^{\frac{1}{2}}[1-tq_x'^{(2)}]\,dt + q_x'^{(1)}\left[1-\frac{1}{2}q_x'^{(3)}\right]\int_{\frac{1}{2}}^{1}[1-tq_x'^{(2)}]\,dt$$

$$= q_x'^{(1)}\left[1-\frac{1}{2}q_x'^{(2)}-\frac{1}{4}q_x'^{(3)}+\frac{3}{16}q_x'^{(2)}q_x'^{(3)}\right]$$

类似可得

$$q_x^{(2)} = q_x'^{(2)}\left[1-\frac{1}{2}q_x'^{(1)}-\frac{1}{4}q_x'^{(3)}+\frac{3}{16}q_x'^{(1)}q_x'^{(3)}\right]$$

而

$$\begin{aligned} q_x^{(3)} &= 1-p_x^{(\tau)}-q_x^{(1)}-q_x^{(2)} \\ &= 1-p_x'^{(1)}p_x'^{(2)}(1-q_x'^{(3)})-q_x^{(1)}-q_x^{(2)} \end{aligned}$$

最后化简得

$$q_x^{(3)} = q_x'^{(3)}\left[1-\frac{3}{4}q_x'^{(1)}-\frac{3}{4}q_x'^{(2)}+\frac{5}{8}q_x'^{(1)}q_x'^{(2)}\right]$$

8.4.4 近似计算

无论是用式 (8.4.8) 计算 $q_x'^{(j)}$，还是用式 (8.4.9) 或式 (8.4.10) 计算 $q_x^{(j)}$，都涉及较复杂的运算。因此在允许的误差范围内，我们有必要运用近似计算方法简化计算。

首先注意，当相应于各终止原因的终止力在各年龄内均为常数时，有：

$$\begin{aligned} m_x^{(j)} &= \frac{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}\,dt}{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}dt} \\ &= \frac{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(j)}dt}{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}dt} \\ &= \mu_x^{(j)} \end{aligned}$$

同样也有

$$m_x'^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_tp_x'^{(j)}\mu_{x+t}^{(j)}dt}{\int_0^1 {}_tp_x'^{(j)}\,dt} = \mu_x^{(j)}$$

因此，$m_x^{(j)} = m_x'^{(j)}$。一般情况下，均有 $m_x^{(j)} \approx m_x'^{(j)}$。

另外，在多元风险模型中，若各终止事件的发生于各年龄内服从均匀分布，则

$$m_x'^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_tp_x'^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}dt}{\int_0^1 {}_tp_x'^{(j)}\,dt}$$

$$= \frac{q_x'^{(j)}}{\int_0^1 (1 - t q_x'^{(j)}) dt}$$

$$= \frac{q_x'^{(j)}}{1 - \frac{1}{2} q_x'^{(j)}}$$

因为 $1 - {}_t q_x^{(\tau)}$ 不恒等于 $(1 - t q_x'^{(1)}) \cdots (1 - t q_x'^{(m)})$，因此该假设下往往 $m_x^{(j)} \neq m_x'^{(j)}$。但由于我们只求近似值，因此综合上述近似等式，有

$$\frac{q_x^{(j)}}{1 - \frac{1}{2} q_x^{(\tau)}} \approx \frac{q_x'^{(j)}}{1 - \frac{1}{2} q_x'^{(j)}}$$

分别解 $q_x'^{(j)}$和 $q_x^{(j)}$ 得

$$q_x'^{(j)} \approx \frac{q_x^{(j)}}{1 - \frac{1}{2}(q_x^{(\tau)} - q_x^{(j)})} \tag{8.4.11}$$

和

$$q_x^{(j)} \approx \frac{q_x'^{(j)} \left[1 - \frac{1}{2} q_x^{(\tau)}\right]}{1 - \frac{1}{2} q_x'^{(j)}} \tag{8.4.12}$$

与式（8.4.10）相比，近似计算式（8.4.11）和（8.4.12）都只涉及简单的四则运算。

§ 8.5 趸缴纯保费

在人身保险中，当需要根据被保险人终止保险的原因来确定给付金额时，就要用到多元风险模型。

下面用 $B_{x+t}^{(j)}$表示在年龄 $x + t$ 岁时因原因 j 终止保险所对应的给付金额，$\bar{A}$ 表示趸缴纯保费。我们可以用两种方法对趸缴纯保费进行推导。

第一种方法：相应于终止事件 j 的保险给付的精算现值为

$$\int_0^\infty B_{x+t}^{(j)} v^t \, {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt \quad (j = 1,2,\cdots,m)$$

所有这些精算现值的和即为趸缴纯保费，因此，

$$\bar{A} = \sum_{j=1}^m \int_0^\infty B_{x+t}^{(j)} v^t \, {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt \tag{8.5.1}$$

第二种方法：构造损失函数

$$L = B_{x+T}^{(J)} v^T - \bar{A} (T > 0, J = 1,2,\cdots,m)$$

再根据精算等价原理，即

$$E[L] = 0$$

则

$$\bar{A} = E[B_{x+T}^{(J)} v^T]$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} B_{x+T}^{(j)} v^t \, {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt$$

寿险保单有时附有加倍补偿条款，即若死亡是由意外事故造成的，则给付额加倍。在这种情形下，令 $J=1$ 表示意外事故导致的死亡，$J=2$ 表示其他所有原因导致的死亡，取 $B_{x+t}^{(1)}=2$，$B_{x+t}^{(2)}=1$，那么单位保额的 n 年定期寿险的趸缴纯保费为

$$\bar{A} = 2\int_0^n v^t \, {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(1)} dt + \int_0^n v^t \, {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(2)} dt \tag{8.5.2}$$

为了计算的方便，我们要把积分表示式化为级数表示式。先考虑式（8.5.2）中的第一个积分式，把它分解成各年的积分之和，即

$$\int_0^n v^t \, {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(1)} dt = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_kp_x^{(\tau)} \int_0^1 v^s \, {}_sp_{x+k}^{(\tau)} \mu_{x+k+s}^{(1)} ds$$

如果假定该多元风险模型中每个终止事件在各年龄内服从均匀分布，那么

$$\int_0^n v^t \, {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(1)} dt = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \, {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+t}^{(1)} \int_0^1 (1+i)^{1-s} ds$$
$$= \frac{i}{\delta} \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \, {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)}$$

同理，式（8.5.2）中第二个积分式也可类似地表示为级数形式。两者合并，得

$$\bar{A} = \frac{i}{\delta}\left[\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \, {}_kp_x^{(\tau)} (2q_{x+k}^{(1)} + q_{x+k}^{(2)})\right]$$
$$= \frac{i}{\delta} \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \, {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} + \frac{i}{\delta} \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \, {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(\tau)}$$
$$= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1(1)} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1} \tag{8.5.3}$$

其中 $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1(1)}$是给付额为 1 的 n 年意外事故死亡保险的趸缴纯保费，$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1}$是给付额为 1 的 n 年死亡保险（不论死亡原因）的趸缴纯保费。在计算 $\bar{A}$ 时，${}_kp_x^{(\tau)}$ 可看作生命表中的生存函数，若能获得 $q_{x+k}^{(1)}$的值，则无须构造整个二元风险表。

上面所讨论的是一种很简单的情形，因为给付额不随终止的年龄而变化，特别是在每一年龄内无变化。为了研究更复杂的情况，我们考虑有两个终止原因的多元风险模型。为简单起见，我们取 $B_{x+t}^{(1)}=t$，$B_{x+t}^{(2)}=0$，$(t>0)$，这时

$$\bar{A} = \int_0^{\infty} t v^t \, {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(1)} dt$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_kp_x^{(\tau)} \int_0^1 (k+s) v^s \, {}_sp_{x+k}^{(\tau)} \mu_{x+k+s}^{(1)} ds$$

进一步地，我们假设该多元风险模型中的终止事件在各年龄内服从均匀分布，于是

$$\bar{A} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} \int_0^1 (k+s)(1+i)^{1-s} ds$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} \frac{i}{\delta}\left(k + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{i}\right) \tag{8.5.4}$$

其中

$$k+\frac{1}{\delta}-\frac{1}{i}\approx k+\frac{1}{2}$$

可看作第 $k+1$ 年的平均给付额，而$\frac{i}{\delta}$可看作以立即给付代替年末给付所需的调整因子。近似地，我们把所有给付都看成是在年中 $k+\frac{1}{2}$时发生，给付额都为 $k+\frac{1}{2}$，那么有

$$\bar{A}\approx\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_kp_x^{(\tau)}q_{x+k}^{(1)}\left(k+\frac{1}{2}\right) \tag{8.5.5}$$

用式（8.5.5）求出的近似值与精确值很接近。

式（8.5.5）也可在式（8.5.4）中对积分

$$\int_0^1(k+s)(1+i)^{1-s}ds$$

应用中点规则估值而得到。尤其在当 $B_{x+t}^{(j)}$是一个复杂的函数时，这种近似方法被更普遍地应用。例如，当我们对式（8.5.1）中第 j 个积分运用均匀分布假设时，便得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\ {}_kp_x^{(\tau)}q_{x+k}^{(j)}\int_0^1B_{x+k+s}^{(j)}(1+i)^{1-s}ds$$

再运用中点规则估值，便得

$$\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_kp_x^{(\tau)}q_{x+k}^{(j)}B_{x+k+\frac{1}{2}}^{(j)}$$

它可以作为一个估值公式。

[例 8.5.1] 某保单为 x 岁的人在 r 岁以前提供金额为 $2B$ 的意外事故死亡给付和金额为 B 的其他原因死亡给付；在 r 岁以后，对任何原因造成的死亡均提供金额为 B 的给付。求该保单的趸缴纯保费的表达式。

解：令 $J=1$ 表示意外事故死亡，$J=2$ 表示其他原因死亡。

第一种方法：意外事故死亡的精算现值为

$$\int_0^{\infty}Bv^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(1)}dt+\int_0^{r-x}Bv^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(1)}dt$$

其他原因死亡给付的精算现值为

$$\int_0^{\infty}Bv^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(2)}dt$$

趸缴纯保费为以上两式之和，即

$$\int_0^{\infty}Bv^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(\tau)}dt+\int_0^{r-x}Bv^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(1)}dt$$

第二种方法：令损失函数

$$L=\begin{cases}2Bv^T-\bar{A}, & J=1,0<T<r-x\\ Bv^T-\bar{A}, & J=1,T\geqslant r-x\\ Bv^T-\bar{A}, & J=2,T>0\end{cases}$$

由等价原理 $E[L]=0$，得

$$\bar{A}=\int_0^{\infty}Bv^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(\tau)}dt+\int_0^{r-x}Bv^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(1)}dt$$

本章只是简单介绍了多元风险模型在精算学中的应用，更为复杂的情况将在下一章讨

论。

习　题　八

1. 设 $\mu_{x+t}^{(j)}=\mu_x^{(j)}$ $(j=1, 2, \cdots, m, t\geqslant 0)$，求以下函数的表达式：

(1) $f(t, j)$；(2) $h(j)$；(3) $g(t)$。

并证明 T 与 J 是相互独立的随机变量。

2. 一个多元风险模型有三种风险，其中死力分别为 $\mu_x^{(1)}$、$\mu_x^{(2)}$和 $\mu_x^{(3)}$，若 $\mu_x^{(k)}=\dfrac{3}{11k(100-k)}$，$k=1, 2, 3$。试求一个 10 岁的人活到 60 岁的概率。

3. 一个两年制大学，其学生离开学校有如下因素及概率：

年级	开除	其他原因
1	0.10	0.30
3	0.05	0.20

(1) 若最终有 180 名毕业生，试求初始学生数；

(2) 若每年初报到学生之和为 800 人，求初始学生数。

4. 含两个终止原因的多元风险模型具有以下终止力：

$\mu_{x+t}^{(1)}=\dfrac{1}{100-(x+t)}$，$(t<100-x)$ 和 $\mu_{x+t}^{(2)}=\dfrac{2}{100-(x+t)}$，$(t<100-x)$，若 $x=50$，求以下函数的表达式：

(1) $f(t, j)$；(2) $g(t)$；(3) $h(j)$；(4) $h(j|t)$。

5. 在双风险模型中，若

$\mu_{x+t}^{(1)}=\left(\dfrac{r_1}{c}\right)\cdot t$，$(t\geqslant 0)$ 和 $\mu_{x+t}^{(2)}=\left(\dfrac{r_2}{c}\right)\cdot t$，$(t\geqslant 0)$，

其中 r_1、r_2 和 c 均为大于 0 的常数，求 h (1)。

6. 在 m 元风险模型中，若

$\mu_{x+t}^{(j)}=\dfrac{j}{m+1}\cdot\dfrac{1}{100-x-t}$，$(j=1, 2, \cdots, m; t<100-x)$

求以下各函数：

(1) ${}_tp_x^{(\tau)}$；(2) $f(t, j)$；(3) $g(t)$；(4) $h(3|T=5)$。

7. 在三元风险模型中，给定 $\mu_x^{(j)}=0.2j$，$(j=1, 2, 3)$，求 $q_x^{(2)}$。

8. 某双风险模型中，$\mu_x^{(1)}=\mu_x^{(2)}=0.3$，求 $q_x^{(1)}$。

9. 已知 (1) $\mu_x^{(1)}=\dfrac{1}{100-x}$；(2) $\mu_x^{(2)}=1$；(3) $l_0^{(\tau)}=1000$，求 $d_x^{(2)}$。

10. 对一个三元风险模型，已知：

(1) $q_{50}^{(1)}=q_{50}^{(3)}$；(2) $q_{50}^{(2)}=2q_{50}^{(1)}$；(3) $\mu_{50+t}^{(1)}=\ln 2$，$(0<t<1)$。

每年内相应与各终止原因的终止力为常数。试计算 $1000q_{50}'^{(2)}$。

11. 根据例 7.3.1 中的多元风险表，用两种方法计算：

(1) ${}_{3}p_{65}^{(\tau)}$；(2) ${}_{3|}p_{65}^{(1)}$；(3) ${}_{3}p_{65}^{(2)}$。

12. 为参加精算师考试的学生建立一个双风险模型如下：

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$
21	0.008	0.15
22	0.015	0.20
23	0.025	0.25

其中 $q_x^{(1)}$ 表示因获得精算师资格而终止考试的概率，$q_x^{(2)}$ 表示因其他所有原因而终止考试的概率。若死力为常数 $\mu=0.04$，求现年 21 岁的学生在 3 年之后仍生存并已获得精算师资格的概率。

13. 给定 $\mu_x^{(1)}=\dfrac{1}{a-x}$，$0\leqslant x<a$ 及 $\mu_x^{(2)}=1$，设 $l_0^{(\tau)}=a$，求：

(1) $l_x^{(\tau)}$；(2) $d_x^{(1)}$；(3) $d_x^{(2)}$。

14. 一个双风险模型，若 (1) $l_{30}^{(\tau)}=1000$； (2) $q_{30}'^{(1)}=0.100$； (3) $q_{30}'^{(2)}=0.300$；(4) ${}_{1|}q_{30}^{(1)}=0.075$；(5) $l_{32}^{(\tau)}=472$。试计算 $q_{31}^{(2)}$

15. 已知 (1) $\mu_{x+t}^{(1)}=c$，$0\leqslant t<1$；(2) ${}_{t}p_x^{(\tau)}=m$，求 $q_x'^{(1)}$。

16. 一个双风险模型中，$l_{30}^{(\tau)}=1000$，$l_{32}^{(\tau)}=600$，${}_{1|}q_{30}^{(1)}=0.04$，$q_{30}'^{(1)}=0.09$，$q_{30}'^{(2)}=0.18$，求 $q_{31}^{(2)}$。

17. 对一个双风险模型，若 (1) $q_{71}^{(1)}=0.02$； (2) $q_{71}^{(2)}=0.06$； (3) 在多元风险模型中，各种终止事件的发生在每年内服从均匀分布假设。试计算 $1000q_{71}'^{(1)}$。

18. 给定 $\mu_x^{(1)}=\dfrac{2x}{a-x^2}$，$0\leqslant x<\sqrt{a}$ 及 $\mu_x^{(2)}=c$，$c>0$，设 $l_0^{(\tau)}=1000$，求 $l_x^{(\tau)}$。

19. 求下列导数：

(1) $\dfrac{d}{dx}{}_{t}p_x^{(\tau)}$；(2) $\dfrac{d}{dx}{}_{t}q_x^{(j)}$；(3) $\dfrac{d}{dt}{}_{t}q_x^{(j)}$。

20. 若对 $0\leqslant t<1$，$\mu_{x+t}^{(1)}$ 等于常数 c，将下面各量用 c 和 ${}_{t}p_x^{(\tau)}$ 表示：

(1) $q_x'^{(1)}$；(2) $m_x^{(1)}$；(3) $q_x^{(1)}$。

21. 对于一个多元风险模型，若 (1) ${}_{t}p_x^{(\tau)}=1-0.03t$，($0\leqslant t\leqslant 1$)；(2) $\mu_{x+t}^{(1)}=0.02t$，($0\leqslant t\leqslant 1$)。试计算 $m_x^{(1)}$。

22. 对一双风险模型，给定 $q_{40}'^{(1)}=0.02$ 和 $q_{40}'^{(2)}=0.04$，计算 $q_{40}^{(\tau)}$ (精确到四位小数)。

23. 对一双风险模型，给定 $m_{40}^{(\tau)}=0.2$ 和 $q_{40}'^{(2)}=0.1$，计算 $q_{40}'^{(1)}$ (精确到四位小数)。

(1) 在双风险模型中，各终止事件的发生服从均匀分布；

(2) 在伴随单风险模型中，各终止事件的发生服从均匀分布。

24. 给出三个终止原因，1 为死亡，2 为残疾，3 为退休。根据下面所给的独立终止率，运用式 (8.4.9) 构造多元风险表。

x	$q_x'^{(1)}$	$q_x'^{(2)}$	$q_x'^{(3)}$
62	0.020	0.030	0.200
63	0.022	0.034	0.1000
64	0.028	0.040	0.120

25. 根据上题中的独立终止率，运用式（8.4.12）构造多元风险表。

26. 在适当的均匀分布假设下，分别利用例 8.3.1 和例 8.4.1 中 $q_x^{(j)}$ 和 $q_x'^{(j)}$ 的各值计算 $m_x^{(j)}$ 和 $m_x'^{(j)}$ 的值，其中 $j=1, 2$；$x=65, \cdots, 69$。

27. 一个多元风险模型，若（1）终止因素为死亡、残疾和退保并分别用 1、2 和 3 表示；（2）$q_{60}'^{(1)}=0.010$，$q_{60}'^{(2)}=0.050$，$q_{60}'^{(3)}=0.100$；（3）退保仅发生在年末；（4）死亡和残疾在伴随单风险模型中在每一年内服从均匀分布。试计算 $q_{60}^{(3)}$。

28. 在一个二元风险模型中，给定 $l_{30}^{(\tau)}=1000$，$l_{32}^{(\tau)}=562$，${}_{1|}q_{30}^{(1)}=0.05$，$q_{30}'^{(1)}=0.10$，$q_{30}'^{(2)}=0.20$，试求 $q_{31}^{(2)}$。

29. 以下数据摘自一个三元风险表，试求 $l_{63}^{(\tau)}$。

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$	$q_x^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)}$	$q_x'^{(1)}$	$q_x'^{(2)}$	$q_x'^{(3)}$
60	0.010	0.050	0.020	—	1000	—	—	—
61	—	—	—	0.076	—	—	—	—
62	—	—	—	—	—	0.023	0.033	0.990
63	—	—	—	0.098	—	—	—	—

30. 给出下列各种终止率，你怎样构造多元风险表？

（1）$q_x'^{(1)}$，$q_x'^{(2)}$，$q_x^{(3)}$；（2）$q_x'^{(1)}$，$q_x^{(2)}$，$q_x^{(3)}$

31. 在一双风险表中，原因 1 为死亡，原因 2 为解约，并假设：

（1）在年龄 n 到 $n+1$ 之间死亡的发生服从均匀分布；

（2）在年龄 n 到 $n+1$ 之间解约的发生只在刚达到年龄 n 时，又设 $l_{50}^{(\tau)}=1000$，$q_{50}^{(2)}=0.2$ 及 $d_{50}^{(1)}=0.06d_{50}^{(2)}$，求 $q_{50}'^{(1)}$。

32. 某双风险模型中的两种风险分别为意外死亡和其他因素。若（1）对（x）因意外死亡支付为 2，其他原因死亡支付为 1 的完全连续型终身寿险；（2）$\mu_{x+t}^{(1)}=\delta$。试计算该保险的趸缴纯保费。

33. 一份对（x）的终身寿险，保额为 100000 元，若（1）$\delta=0.06$；（2）死亡给付在死亡发生时进行；（3）前 30 年内意外死亡的给付金加倍；（4）$\mu_x^{(\tau)}(t)=0.008$，$(t\geqslant 0)$；（5）$\mu_x^{(1)}(t)=0.001$，$(t\geqslant 0)$，其中 $\mu_x^{(1)}$ 为意外死亡的死力。试计算趸缴纯保费。

34. 一个附有加倍补偿条款的终身寿险在（x）死亡时立刻给付 1 元。若（x）死于意外事故，则增加给付 1 元，其趸缴纯保费为 S。一个附有三倍补偿条款的终身寿险在（x）死于意外事故时增加给付 2 元，其趸缴纯保费为 T。若意外事故死亡的死力为常数 μ，则其他原因死亡的死力为 5μ，求 $T-S$。

35. 为（x）签订的一个终身寿险保单，其第一年的基本死亡给付为 10000 元，以后为 20000 元，附加条款规定，当死于意外事故时增加给付 20000 元。

(1) 意外事故死亡的死力为 $\mu_{x+t}^{(ad)}=0.005$，$t\geqslant 0$;

(2) $\mu_{x+t}^{(\tau)}=0.040$，$t\geqslant 0$;

(3) $\delta=0.06$。

求该保单的趸缴纯保费。

36. 在多元风险模型中，假设各终止事件的发生在各年龄内服从均匀分布，求证

$$\mu_{x+\frac{1}{2}}^{(j)}=m_x^{(j)}。$$

37. 在例 8.4.3 中假设第三种独立终止事件的发生在 69 岁不服从均匀分布，但满足

$$ {}_tp_{69}'^{(3)}=\begin{cases}1-0.12t & (0<t<1)\\ 0 & (t=1)\end{cases}$$

即在这一年内第三种独立终止率为 0.12，然后恰在 70 岁前，所有仍存续者都因第三种原因而终止。这等价于假设 $q_{69}'^{(3)}=1$，那么 $q_{69}^{(3)}$的值是多少？

38. 以下哪些式子是对的？如不对，请修正。

(1) $q_{30}^{(j)}\approx\dfrac{m_x^{(j)}}{1+\dfrac{1}{2}m_x^{(j)}}$;

(2) $\displaystyle\int_0^1 l_{x+t}^{\tau}dt\approx\frac{l_x^{(\tau)}}{1+\dfrac{1}{2}m_x^{(\tau)}}$;

(3) 双风险表中 $q_x^{(1)}=q_x'^{(1)}\left(1-\dfrac{1}{2}q_x'^{(2)}\right)$，其中假设在每个伴随单风险表中，终止事件的发生均在年龄 x 到 $x+1$ 之间服从均匀分布。

39. 对某一确定年龄 x、特殊的终止原因 j 及常数 K_j，证明下列条件是等价的：

(1) ${}_tq_x^{(j)}=K_j\cdot{}_tq_x^{(\tau)}$，$(0\leqslant t\leqslant 1)$;

(2) $\mu_{x+t}^{(j)}=K_j\cdot\mu_{x+t}^{(\tau)}$，$(0\leqslant t\leqslant 1)$;

(3) $1-{}_tq_x'^{(j)}=[1-{}_tq_x^{(\tau)}]^{K_j}$，$(0\leqslant t\leqslant 1)$。

40. 在多元风险表中，若

$$\mu_{x+t}^{(j)}=\mu_x^{(j)},(0\leqslant t\leqslant 1;j=1,2,\cdots,m)$$

或

$${}_tq_x^{(j)}=t\cdot q_x^{(j)},(0\leqslant t\leqslant 1;j=1,2,\cdots,m)$$

求证

$${}_tq_x^{(j)}=K_j\cdot{}_tq_x^{(\tau)},(0\leqslant t\leqslant 1;j=1,2,\cdots,m)$$

其中 K_j 是一个与 t 无关的常量。



第九章

养老金计划的精算方法

本章主要内容： 本章介绍养老金计划的基本概念、基本函数和积累给付的精算现值。其中养老金计划的基本函数包括基于多元风险模型的概率和薪金函数等；在本章的第二节至第五节分别介绍了年老退休给付、捐纳金、残疾退休给付和解约给付，并推导得出它们的精算现值。

本章主要词汇： 养老金计划　捐纳金　确定给付计划　即确定缴费计划　年薪函数

§9.1　养老金计划及其基本函数

9.1.1　养老金计划简介

退休员工的生活保障是现代社会需要解决的一个重要问题，政府的努力大都只限于通过各种形式的社会保险提供最低的生活保障。作为对社会保险的补充，政府可以通过税收上的优惠，鼓励企业为其员工建立养老金计划。其目的是通过企业与员工的定期供款以信托或保险的形式建立一个养老基金，使员工在退休后能获得一个年金收入，以达到适当的生活水平。为了区别于社会保险中的退休保障，上述养老金计划也称为私人养老金计划。由于本章仅讨论私人养老金计划，所以以下均简称养老金计划。

养老金计划可以由企业单独为其员工设立，也可由行业工会为各所属企业的员工共同设立。通常，养老金计划的基本保障是为有一定工作年限并达到一定年龄的员工提供一个退休年金；此外，有些养老金计划还提供附加保障，例如因残疾而退休的年金给付、退出

养老金计划时所积累供款的退还或提供一个延期年金、在工作期间死亡时为受益人提供一笔现金给付或一项年金给付等。以下我们把用于支付养老金成本的定期供款称为捐纳金(contribution)（而不像在人寿保险中那样叫做保费）。养老金成本可能全由企业负担而员工无须缴付捐纳金，这种养老金计划称为非捐纳计划；若养老金成本的一部分由加入计划的员工负担，剩余部分由企业负担，这种养老金计划称为捐纳计划。

根据退休年金年给付额的不同决定方法，养老金计划可分为两大类：确定给付计划(defined benefit plan，简称 DB 计划）和确定缴费计划（defined contribution plan，简称 DC 计划)。在确定给付计划中，先用一个计算公式确定未来的年给付额，再根据死亡率、解约率、年薪增长率、投资回报率和费用等确定捐纳金水平。从精算的观点来看，养老金计划可看成用工作期间的捐纳金购买一个退休时开始给付的延期生存年金和一定的附加给付。给付与捐纳金在精算现值上应当相等，这种收入与支出的平衡可以建立在个人的基础上，但更多的是建立在计划加入者团体集合的基础上。达成这种平衡的方法是养老金筹资理论(类似于寿险的定价原理）的研究内容。本章将对单个计划加入者的捐纳金和给付分别计算其精算现值，总体的精算现值可通过对所有计划加入者求和而得到。

9.1.2　基本函数

养老金计划是多元风险理论在精算学中的一个重要应用。捐纳金与退休收入的精算现值的计算是基于一张为养老金计划加入者构造的多元风险表。这个表在工作期间的各年内给出如下概率：解约概率，死亡概率，因残疾而退休的概率，因年老而退休的概率等。从 x 岁到 $x+1$ 岁的一年的上述概率分别记为 $q_x^{(w)}$、$q_x^{(d)}$、$q_x^{(i)}$ 和 $q_x^{(r)}$。这些符号与上一章的符号是一致的。此外，我们也将运用上一章中的存续函数 $l_x^{(\tau)}$。设 a 为所有计划参加者的最低年龄，给 $l_a^{(\tau)}$设立一个值，那么我们就有

$$
\begin{aligned}
l_{x+1}^{(\tau)} &= l_x^{(\tau)}[1-(q_x^{(w)}+q_x^{(d)}+q_x^{(i)}+q_x^{(r)})] \\
&= l_x^{(\tau)} p_x^{(\tau)}
\end{aligned}
$$

我们可以通过存续函数计算${}_kp_x^{(\tau)}$ 如下

$$
{}_kp_x^{(\tau)} = \frac{l_{x+k}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}
$$

也可以通过递推的方式来求${}_kp_x^{(\tau)}$，即

$$
{}_kp_x^{(\tau)} = {}_{k-1}p_x^{(\tau)} p_{x+k-1}^{(\tau)}
$$

对应于这种多元风险表的终止力在大多数年龄上是连续的，分别记为 $\mu_x^{(w)}$、$\mu_x^{(d)}$、$\mu_x^{(i)}$和 $\mu_x^{(r)}$。但在某些年龄上可能出现间断，主要是最低退休年龄 a 和限定退休年龄 ω。由于 ω 表示限定退休年龄，所有达到年龄 ω 的加入者都将在这个年龄退休，因此理论上我们可以假设 $l_\omega^{(\tau)}=0$，但有时我们假定 $l_\omega^{(\tau)}\neq 0$ 会更适合。除此之外，我们将假设终止事件分布在各个年龄内。

在加入养老金计划的最初几个年度，解约率常常较高，解约给付可能仅是加入者的捐纳金，可能还包含积累的利息。一定时期（例如 5 年）以后，解约率将降低，解约者可能获得一个延期年金。如果解约率的变化如上所述，则有必要在适当的年数上使用选择解约率。同样，因残疾而退休的情形也可能需要在最初几个年度使用选择残疾率。因此，如果

使用选择多元风险表，本章的理论将更为适用。但无论使用选择表还是非选择表，计算原理是相同的。因此，在本章中，我们只把加入计划时的年龄记为 x，而不指出用的是综合生命表、选择生命表还是选择—终极生命表。

在本章末给出了一个养老金函数例表（表 9-1），表中的加入计划年龄为 30 岁，最低退休年龄为 $a=60$ 岁，限定退休年龄为 $\omega=71$ 岁，这里 $l_{71}^{(\tau)}=0$。

一般来说，因残疾而退休的员工其往后各年的死亡率与正常退休者也往往不同。为了计算退休金的精算现值，有必要对因残疾退休和因年老退休这两种情形采用不同的生命表。对于前一种情形，在 $x+t$ 岁时的年金精算现值因子记为 $\bar{a}_{x+t}^{i}$；对后一种情形，在 $x+t$ 岁时的年金精算现值因子记为 $\bar{a}_{x+t}^{r}$。其中为方便计，我们假设 $x+t$ 岁时的年金为连续给付年金，它可作为通常是按月给付的养老金的近似估值。

一些养老金计划给付额的确定不依赖于工资收入，但另一些养老金计划的给付额依赖于工资收入，它们或根据最后几年的平均工资收入来确定，或根据整个工作期间的平均工资收入来确定。而且，计划资助者的捐纳金也常常表示为工资的某个百分数。因此，预测未来的工资收入是很重要的。为此，我们定义如下的年薪函数：

（1）对于 x 岁加入养老金计划且现年 $(x+h)$ 岁的参加者的实际年薪记为 $(AS)_{x+h}$，在 $(x+h+t)$ 岁的参加者的预期年薪记为 $(ES)_{x+h+t}$；

（2）假设一个年薪比例函数 S_y，使得

$$(ES)_{x+h+t}=(AS)_{x+h}\frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}} \tag{9.1.1}$$

其中 S_y 不仅反映年薪随业绩与资历的增长而增长，也反映年薪随物价上涨而增长。例如，在本章末的例表中，$S_y=s_y(1.06)^{y-30}$，这里因子 s_y 表示年薪随个人的业绩与资历而增长的过程，而 6% 这个积累因素表示通货膨胀的长期影响和员工生产能力的普遍提高所导致的年薪增长率。与存续函数 $l_x^{(\tau)}$ 类似，S_y 的初始值也可以任意选定。在本章末的例表中，取 $S_{30}=1$。我们通常假设函数 S_y 为分段函数，在任意给定年龄的一年内为常数。

在计算养老金计划的给付和相应捐纳金的精算现值的过程中，一个多元风险模型、一个年薪比例函数、一个关于投资回报率的假设以及有关残疾退休和年老退休的适当的年金精算现值因子是必要的。在下面各节中，我们将讨论对养老金计划的捐纳金和各种类型的给付进行估值的基本公式。

§9.2 捐纳金的精算现值

在养老金计划中，捐纳金通常有两种计算方式：一种是每个加入者都按统一数额缴纳，另一种是每个加入者都按薪金的统一百分比缴纳。下面我们将对现年 $x+h$ 岁的加入者分别就这两种形式的捐纳金求其精算现值。

先设捐纳金以连续形式缴纳，每年缴纳的总数为 c，这时每个现年 $x+h$ 岁的加入者未来捐纳金的精算现值为

$$c\int_0^{\omega-x-h} v^t\ {}_tp_{x+h}^{(\tau)}dt = c\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^k\ {}_kp_{x+h}^{(\tau)}\int_0^1 v^s\ {}_sp_{x+h+k}^{(\tau)}ds \tag{9.2.1}$$

如果我们对上式等号两边每个积分都使用中点规则，则得到

$$c\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^k\ {}_kp_{x+h}^{(\tau)}v^{\frac{1}{2}}\ {}_{\frac{1}{2}}p_{x+h+k}^{(\tau)} = c\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k+\frac{1}{2}}p_{x+h}^{(\tau)} \tag{9.2.2}$$

式（9.2.2）也可由假设每一年的捐纳金均在年中缴纳而直接推出，它可作为未来捐纳金精算现值的近似计算公式。

若捐纳金表示为年薪的一个固定百分比 c，而加入者现在的年薪为 $(AS)_{x+h}$，那么其未来捐纳金的精算现值可表示为

$$c(AS)_{x+h}\int_0^{\omega-x-h} v^t\ {}_tp_{x+h}^{(\tau)}\frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}}dt \tag{9.2.3}$$

如果 S_y 在每一年内均为常数，我们对上式右边每个积分应用中点规则，得

$$\frac{c(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k+\frac{1}{2}}p_{x+h}^{(\tau)}S_{x+h+k} \tag{9.2.4}$$

公式（9.2.2）和公式（9.2.4）在下面这些简单的情形中可用于求未来捐纳金的精算现值。

[例 9.2.1]　给定实际年利率 6%，$\omega=71$，对现年为 50 岁的养老金计划加入者，在下列各种情形下求其未来捐纳金精算现值的近似计算公式：

（1）每年的捐纳金均为 1200 元

（2）第一年为 1200 元，以后每年增加 100 元；

（3）第一年为 1200 元，以后每年均比上一年增加 4%。

解：（1）利用公式（9.2.2），可得精算现值为

$$1200\sum_{k=0}^{20}\left(\frac{1}{1.06}\right)^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k+\frac{1}{2}}p_{50}^{(\tau)}$$

（2）与（1）不同的只是捐纳金按等差级数变化，即 $c_k=1200+100k$，$(k=0,1,2,\cdots,20)$，可直接推得其精算现值的近似公式为：

$$\sum_{k=0}^{20} c_k v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k+\frac{1}{2}}p_{50}^{(\tau)} = 100\sum_{k=0}^{20}(12+k)\left(\frac{1}{1.06}\right)^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k+\frac{1}{2}}p_{50}^{(\tau)}$$

（3）类似于（2），这里 $c_k=1200\ (1.04)^k$，可得精算现值的近似计算公式为：

$$\sum_{k=0}^{20} c_k v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k+\frac{1}{2}}p_{50}^{(\tau)} = 1200\sum_{k=0}^{20}(1.04)^k\left(\frac{1}{1.06}\right)^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k+\frac{1}{2}}p_{50}^{(\tau)}$$

$$= \frac{1200}{(1.06)^{\frac{1}{2}}}\sum_{k=0}^{20}\left(\frac{1.04}{1.06}\right)^k\ {}_{k+\frac{1}{2}}p_{50}^{(\tau)}$$

[例 9.2.2]　在超收入型养老基金计划中，养老金的给付额与捐纳金均根据超过一定收入水平的那部分年薪来确定，各年的这个标准收入水平记为 H_0，H_1，H_2，…，H_k，…。这里 H_k 表示第 $k+1$ 年的标准收入水平。设 $\omega=71$，捐纳金为未来超额薪金的 5%，对现年 50 岁、年薪为 30000 元的雇员，求其未来捐纳金的精算现值。这里设 $30000>H_0$，而未来的年薪均高于标准收入水平 H_k，$(k=1,2,\cdots)$。

解：未来各年的捐纳金预计为

$$0.05\left[30000\frac{S_{50+k}}{S_{50}}-H_k\right]\quad(k=1,2,\cdots)$$

因此其精算现值为

$$0.05\sum_{k=0}^{20}\left[30000\frac{S_{50+k}}{S_{50}}-H_k\right]v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k+\frac{1}{2}}p_{50}^{(\tau)}$$

§9.3　年老退休给付及其精算现值

养老金计划的主要保障是为年老退休者提供一个延期年金。

对于确定缴费计划，计划加入者在退休时开始领取的这个年金是雇主及本人已缴捐纳金的实际积累值所能购买的一项生存年金。理论上，该年金的精算现值就是捐纳金的实际积累值，年给付额依赖于这个实际积累值，因此对于确定缴费计划通常无法在加入计划时确定未来退休金的数额。

而对于确定给付计划，我们需要先确定年给付额，再求其精算现值，然后才能确定应缴的捐纳金。下面我们就确定给付计划，介绍确定给付计划年给付额的几种计算公式。

我们引进函数 $R(x, h, t)$，$R(x, h, t)$ 表示在 x 岁加入计划而现年 $x+h$ 岁的员工，将在 $x+h+t$ 岁获得立即或延期给付年金的年给付额。此外我们还假设年给付额不变。

9.3.1　年给付额不依赖于年薪的情形

这种情形的年给付额通常有三种计算方式：

(1) 员工为企业每工作一年，均可在其退休金年给付额上增加一个固定数额 b，包括最后的不足一年部分，这时年给付函数为

$$R(x,h,t)=b(h+t)$$

(2) 若年给付额不包括最后的不足一年部分，则

$$R(x,h,t)=b(h+k)\qquad(k=[t])$$

(3) 在某一规定年数内，每工作一年增加年给付额 b_1，超过的工作年数每年增加较少的年给付额 b_2。如果这个规定年数为 30，那么年给付额为

$$R(x,h,t)=\begin{cases}b_1(h+t) & (h+t\leqslant 30)\\ 30b_1+b_2(h+t-30) & (h+t>30)\end{cases}$$

［例 9.3.1］　某养老金计划为每一工作年提供一个每月 15 元的基本给付，另外提供一个每月 10 元的给付到 65 岁的补充给付。某计划加入者现年 40 岁，在 30 岁时加入该计划。若限定退休年龄 $\omega=71$ 岁，最低退休年龄 $\alpha=60$ 岁，求其可能得到的年给付额。

解：为计算简便起见，通常设退休平均发生在年中，因此基本给付的年给付额为

$$R_1\left(30,10,k+\frac{1}{2}\right)=15\times 12\times\left(10+k+\frac{1}{2}\right)\qquad(20\leqslant k\leqslant 30)$$

补充给付的年给付额为

$$R_2\left(30,10,k+\frac{1}{2}\right)=10\times12\times\left(10+k+\frac{1}{2}\right)\qquad(20\leqslant k\leqslant24)$$

因此，总的年给付额为

$$R\left(30,10,k+\frac{1}{2}\right)=R_1\left(30,10,k+\frac{1}{2}\right)+R_2\left(30,10,k+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\begin{cases}300\times\left(10+k+\frac{1}{2}\right) & (20\leqslant k\leqslant24)\\ 180\times\left(10+k+\frac{1}{2}\right) & (25\leqslant k\leqslant30)\end{cases}$$

［例 9.3.2］ 在上例中，如果在计算年给付额时最多只考虑 35 年工作期，那么情况如何？

解：对于基本给付，年给付额为

$$R_1\left(30,10,k+\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}180\times\left(10+k+\frac{1}{2}\right) & (20\leqslant k\leqslant24)\\ 6300=180\times35 & (25\leqslant k\leqslant30)\end{cases}$$

补充给付保持不变，所以总的年给付额为

$$R\left(30,10,k+\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}300\times\left(10+k+\frac{1}{2}\right) & (20\leqslant k\leqslant24)\\ 6300 & (25\leqslant k\leqslant30)\end{cases}$$

9.3.2 年给付额由后续年薪决定的情形

这种情形的 $R(x,h,t)$ 有三种形式。

(1) 员工退休金的年给付额由其退休前最后一年的年薪决定，通常是最后年薪的一个固定比例 g，那么

$$R(x,h,t)=g(ES)_{x+h+t}$$

$$=g(AS)_{x+h}\frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}}$$

(2) 如果年给付额是最后 m 年平均年薪的一个固定比例 g，那么

$$R(x,h,t)=g\frac{1}{m}\int_{t-m}^{t}(ES)_{x+h+s}ds$$

$$=g\frac{(AS)_{x+h}}{m}\int_{t-m}^{t}\frac{S_{x+h+s}}{S_{x+h}}ds\qquad(9.3.1)$$

其中 $t>m$。若 $t<m$，则从 $(x+h+t-m)$ 到 $(x+h)$ 这一段的年薪是已知的，这时有

$$R(x,h,t)=g\frac{1}{m}\left[\int_{t-m}^{0}(AS)_{x+h+s}ds+\int_{0}^{t}(AS)_{x+h}\frac{S_{x+h+s}}{S_{x+h}}ds\right]$$

为了计算式 (9.3.1)，我们近似地假设退休发生在年中（即 $t=k+\frac{1}{2}$），则

$$R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right)=g\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\frac{1}{m}\int_{k+\frac{1}{2}-m}^{k+\frac{1}{2}}S_{x+h+s}ds$$

在通常情况下，S_y 在每一年内是常数，那么

$$R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right)=g\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}S_{x+h+k-m}+S_{x+h+k-m+1}+\cdots+S_{x+h+k-1}+\frac{1}{2}S_{x+h+k}\right)$$

$$= g(AS)_{x+h}\frac{{}_mZ_{x+h+k}}{S_{x+h}} \tag{9.3.2}$$

其中

$${}_mZ_y = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}S_{y-m} + S_{y-m+1} + \cdots + S_{y-1} + \frac{1}{2}S_y\right) \tag{9.3.3}$$

(3) 更为一般的情形是年给付额由最后 m 年平均年薪与到退休时的工作数的乘积的一个固定比例来确定，这时

$$R(x,h,t) = f(h+t)(AS)_{x+h}\left[\frac{1}{m}\int_{t-m}^{t}\frac{S_{x+h+s}}{S_{x+h}}ds\right]$$

其中 f 是个固定的百分比，例如 2%。类似于式 (9.3.2) 推导，我们用近似计算，式中 ${}_mZ_{x+h+k}$表示对 S_{x+h+k}在区间 $[t,\ t-m]$ 积分所取的近似值，有

$$R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right) = f\left(h+k+\frac{1}{2}\right)(AS)_{x+h}\frac{{}_mZ_{x+h+k}}{S_{x+h}} \tag{9.3.4}$$

特别地，若我们只考虑工作整年数，那么

$$R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right) = f(h+k)(AS)_{x+h}\frac{{}_mZ_{x+h+k}}{S_{x+h}} \tag{9.3.5}$$

其他情形我们将通过例题来说明。

[例 9.3.3] 在分段给付率计划中，年给付额由下式确定：

第 $k+1$ 年内退休的年给付额 = 工作总年数 × (第 $k+1$ 年的标准收入水平 H_k 的 1.25% + 最后 3 年平均年薪超过 H_k 部分的 1.75%)

对某现年 30 岁、年薪 20000 元的加入者，试给出其在 63 岁至 64 岁间退休的年给付额公式（这里假设最后 3 年平均年薪超过 H_{33}）。

解：近似地把退休看作发生在 63.5 岁，那么

$$\begin{aligned} R(30,0,33.5) &= 33.5\left[0.0125H_{33} + 0.0175\left(20000\frac{{}_3Z_{63}}{S_{30}} - H_{33}\right)\right] \\ &= 33.5\left[350\frac{{}_3Z_{63}}{S_{30}} - 0.005H_{33}\right] \end{aligned}$$

[例 9.3.4] 在某扣除计划中，年给付额等于最后 3 年平均年薪的 2% 乘以工作总年数再减去社会保险所提供的最初年退休收入的 50%。对 30 岁加入计划、现年 40 岁、年薪 30000 元的加入者，设其在 65 岁退休，而退休时的社会保险年收入给付预计为 P，求其养老金年给付额。

解：由题中所述方法和所给条件，有

$$\begin{aligned} R(30,10,25) &= 35\left[0.02(30000)\frac{{}_3\tilde{Z}_{65}}{S_{40}}\right] - 0.5P \\ &= 21000\frac{{}_3\tilde{Z}_{65}}{S_{40}} - 0.5P \end{aligned}$$

其中

$${}_3\tilde{Z}_{65} = \frac{S_{62} + S_{63} + S_{64}}{3}$$

9.3.3 年给付额由全期平均年薪决定的情形

在这种情形下，年给付额等于整个工作期平均年薪乘以工作年数再乘一个固定百分比 f。事实上，这相当于计划加入者在整个工作期中的薪金总额乘上固定百分比 f。但由于过去时期的薪金是已知的，未来时期的薪金是预测的，因此，年给付额应分两部分计算。我们把现年 $x+h$ 岁的计划加入者过去的薪金总额记为 $(TPS)_{x+h}$，相应的年给付额部分为

$$f\cdot(TPS)_{x+h}$$

相应于未来工作期的年给付额部分可由下式给出

$$f\cdot\int_0^t(ES)_{x+h+s}ds = f\cdot\int_0^t(AS)_{x+h}\frac{S_{x+h+s}}{S_{x+h}}ds$$

为了进行数值计算，设 S_{x+h+s}是年龄的分段函数并在每个年龄内为常数，又设退休发生在年中，那么上式可写成

$$f\cdot\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\left(\sum_{j=0}^{k-1}S_{x+h+j}+\frac{1}{2}S_{x+h+k}\right) \tag{9.3.6}$$

这里 $k=[t]$。

[例 9.3.5] 一个平均年薪计划提供的年退休给付为整个工作期年薪总额的 2%。对某现年 40 岁、年薪 25000 元的加入者，已知其在 30 岁加入该计划，过去薪金总额为 200000 元，求其在 67 岁至 68 岁间退休时的养老金年给付额。

解：设退休发生在年中，那么年给付额为

$$R(30,10,27.5) = 0.02\left(200000+25000\frac{\sum_{j=0}^{26}S_{40+j}+\frac{1}{2}S_{67}}{S_{40}}\right)$$

$$= 4000+500\frac{\sum_{j=0}^{26}S_{40+j}+\frac{1}{2}S_{67}}{S_{40}}$$

养老金计划加入者从退休时开始领取年给付额为 $R(x,h,t)$ 的一个生存年金，该年金在退休时的精算现值可表示为

$$R(x,h,t)\bar{a}^r_{x+h+t},$$

它类似于上一章第五节中的保险给付额 B_{x+h+t}，于是我们可将现年 $x+h$ 岁的员工的年老退休给付的精算现值表示为积分形式

$$APV = \int_{\alpha-x-h}^{\omega-x-h}v^t\,{}_tp^{(\tau)}_{x+h}\mu^{(r)}_{x+h+t}R(x,h,t)\bar{a}^r_{x+h+t}dt \tag{9.3.7}$$

其中 $x+h<\alpha$（α 为限定退休年龄）。将上面的积分划分为各年龄段的积分之和，即

$$APV = \sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1}v^k\,{}_kp^{(\tau)}_{x+h}\int_0^1 v^s\,{}_sp^{(\tau)}_{x+h+k}\mu^{(r)}_{x+h+k+s}R(x,h,k+s)\bar{a}^r_{x+h+k+s}ds$$

为了简单起见，我们推导一个近似公式。假设退休的发生在每一年龄内服从均匀分布，那么上式可简化为：

$$APV = \sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1}v^k\,{}_kp^{(\tau)}_{x+h}q^{(r)}_{x+h+k}\int_0^1 v^sR(x,h,k+s)\bar{a}^r_{x+h+k+s}ds$$

再应用中点公式便得

$$APV \approx \sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_kp_{x+h}^{(\tau)} q_{x+h+k}^{(r)} R\left(x, h, k+\frac{1}{2}\right) \bar{a}_{x+h+k+1/2}^{r} \tag{9.3.8}$$

这个公式是计算年老退休给付的精算现值的一般方法。

下面我们通过例题来求一些年老退休金的精算现值。

[例 9.3.6] 给出例 9.3.1 中养老金计划的基本给付与补充给付的精算现值。

解：由式 (9.3.8)，基本给付的精算现值为

$$180\sum_{k=20}^{30} v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_kp_{40}^{(\tau)} q_{40+k}^{(r)}\left(10+k+\frac{1}{2}\right)\bar{a}_{40+k+1/2}^{r}$$

补充给付的精算现值为

$$120\sum_{k=20}^{24} v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_kp_{40}^{(\tau)} q_{40+k}^{(r)}\left(10+k+\frac{1}{2}\right)\bar{a}_{40+k+1/2:\overline{25-k-1/2}|}^{r}$$

[例 9.3.7] 在附加计划中，基本年给付额为最后 5 年平均年薪的 1.5% 乘上工作总年数；补充给付给付到 65 岁，给付额为最后 5 年平均年薪的 0.5% 乘上工作总年数。对 30 岁加入计划、现年 45 岁、年薪 40000 元的某企业雇员，求其养老金的精算现值。这里假设最低退休年龄为 60 岁，限定退休年龄为 70 岁，一些加入者直到满 70 岁才退休。

解：先求年给付额函数。对于基本给付，当 $15 \leqslant k \leqslant 24$ 时，有

$$R_1\left(30,15,k+\frac{1}{2}\right) = 600\left(15+k+\frac{1}{2}\right)\frac{{}_5Z_{45+k}}{S_{45}}$$

当 $k=25$ 时，有

$$R_1(30,15,25) = 24000\frac{{}_5\tilde{Z}_{70}}{S_{45}}$$

其中

$${}_5\tilde{Z}_{70} = \frac{S_{65}+S_{66}+S_{67}+S_{68}+S_{69}}{5}$$

对于补充给付，有

$$R_2\left(30,15,k+\frac{1}{2}\right) = 200\left(15+k+\frac{1}{2}\right)\frac{{}_5Z_{45+k}}{S_{45}}$$

于是基本给付与补充给付的精算现值分别为

$$\sum_{k=15}^{24} v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_kp_{45}^{(\tau)} q_{45+k}^{(r)} 600\left(15+k+\frac{1}{2}\right)\frac{{}_5Z_{45+k}}{S_{45}}\bar{a}_{45+k+1/2}^{r} + v^{25}\ {}_{25}p_{45}^{(\tau)} 24000\frac{{}_5\tilde{Z}_{70}}{S_{45}}\bar{a}_{70}^{r}$$

和

$$\sum_{k=15}^{19} v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_kp_{45}^{(\tau)} q_{45+k}^{(r)} 200\left(15+k+\frac{1}{2}\right)\frac{{}_5Z_{45+k}}{S_{45}}\bar{a}_{45+k+1/2:\overline{20-k-1/2}|}^{r}$$

两者之和即为该雇员养老金的精算现值。

最后我们讨论年给付额依赖于整个工作期平均年薪的情形，其中给付额 $R(x, h, t)$ 等于整个工作期平均年薪乘以服务总年数再乘以一个固定比例 f，即整个工作期的总薪金的一个固定比例。

这种情形的养老金精算现值可以分成两部分：

(1) 相应于过去工作期的那部分给付的精算现值为

$$f \cdot (TPS)_{x+h} \sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} v^{k+\frac{1}{2}} {}_{k}p_{x+h}^{(\tau)} q_{x+h+k}^{(r)} \bar{a}_{x+h+k+1/2}^{r} \tag{9.3.9}$$

（2）相应于未来工作期的那部分给付的精算现值，若假设未来薪金是年龄的分段函数并在每一个年龄内为常数，又假设退休均发生在各年龄段的年中。则该精算现值为

$$f \cdot \frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}} \left[\sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} v^{k+\frac{1}{2}} {}_{k}p_{x+h}^{(\tau)} q_{x+h+k}^{(r)} \bar{a}_{x+h+k+1/2}^{r} \left(\sum_{j=0}^{k-1} S_{x+h+j} + \frac{1}{2} S_{x+h+k} \right) \right] \tag{9.3.10}$$

因为对 $k=0$，1，2，…，$\alpha-x-h-1$，有 $q_{x+h+k}^{(r)}=0$，所以上式可改写成

$$f \cdot \frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}} \left[\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^{k+\frac{1}{2}} {}_{k}p_{x+h}^{(\tau)} q_{x+h+k}^{(r)} \bar{a}_{x+h+k+1/2}^{r} \left(\sum_{j=0}^{k-1} S_{x+h+j} + \frac{1}{2} S_{x+h+k} \right) \right] \tag{9.3.11}$$

交换对 k 与对 j 的求和顺序，得

$$f \cdot \frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}} \left[\sum_{j=0}^{\omega-x-h-1} S_{x+h+j} \left(\frac{1}{2} v^{j+\frac{1}{2}} {}_{j}p_{x+h}^{(\tau)} q_{x+h+j}^{(r)} \bar{a}_{x+h+j+1/2}^{r} + \sum_{k=j+1}^{\omega-x-h-1} v^{k+\frac{1}{2}} {}_{k}p_{x+h}^{(\tau)} q_{x+h+k}^{(r)} \bar{a}_{x+h+k+1/2}^{r} \right) \right] \tag{9.3.12}$$

注意，当 $j=\omega-x-h-1$ 时，由于 ${}_{j}p_{x+h}^{(\tau)}=0$，因而内层和式为0。

［例 9.3.8］ 根据本章末的附表（表 9.1），求例 9.3.5 中的计划加入者相应于未来工作期的给付的精算现值。

解：在年中退休的假设下，由式（9.3.10），退休时的养老金给付额 $R(30, 10, 27.5)$ 的精算现值为

$$\frac{500}{S_{40}} \sum_{k=20}^{30} v^{k+\frac{1}{2}} {}_{k}p_{40}^{(\tau)} q_{40+k}^{(r)} \left(\sum_{j=0}^{k-1} S_{40+j} + \frac{1}{2} S_{40+k} \right) \bar{a}_{40+k+1/2}^{r}$$

而由公式（9.3.12）得

$$\frac{500}{S_{40}} \left[\sum_{j=0}^{30} S_{40+j} \left(\frac{1}{2} v^{j+\frac{1}{2}} {}_{j}p_{40}^{(\tau)} q_{40+j}^{(r)} \bar{a}_{40+j+1/2}^{r} + \sum_{k=j+1}^{30} v^{k+\frac{1}{2}} {}_{k}p_{40}^{(\tau)} q_{40+k}^{(r)} \bar{a}_{40+k+1/2}^{r} \right) \right]$$

其中求和的范围由附表中 $a=60$，$\omega=71$ 确定。由于当 $k<20$ 时，$q_{40+k}^{(r)}=0$，因此和式中有很多项为0。

§9.4 残疾退休给付及其精算现值

我们所讨论的残疾退休给付的估值过程类似于确定给付计划的年老退休给付，即先确定年给付额，再求其精算现值。

残疾退休金的年给付额通常由计划加入者在残疾发生时的年薪来确定，但可能会规定一个最低给付额。残疾退休金可能给付到某一确定年龄（例如65岁）时便转为年老退休给付。下面我们将通过一个例子来说明其估值过程：某残疾退休金的年给付额等于计划加入者在残疾发生时的年薪的一个固定百分比乘以其已经工作的年数，但最低年给付额等于这个年薪的固定百分比乘上10；计划加入者必须工作5年以上并在65岁以下残疾时才能获得这项年金。设 f 为上述固定百分比，那么对于年龄为 x 岁的新加入者，其年给付额表示如下：

$$R(x,0,t)=\begin{cases}0 & 0\leqslant t<5\text{ 或 }t\geqslant 65-x\\ 10f(ES)_{x+t}=10f(AS)_x\dfrac{S_{x+t}}{S_x} & 5\leqslant t<10\\ tf(ES)_{x+t}=tf(AS)_x\dfrac{S_{x+t}}{S_x} & 10\leqslant t<65-x\end{cases}\tag{9.4.1}$$

若残疾退休金一直给付到计划加入者死亡，即中间不能转换成年老退休给付，那么其精算现值如下

$$\int_5^{65-x} v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+k}^{(i)}R(x,0,t)\bar{a}_{x+t}^{i}dt\tag{9.4.2}$$

上式又可近似地写成

$$\sum_{k=5}^{64-x} v^{k+\frac{1}{2}}\,{}_kp_x^{(\tau)}q_{x+k}^{(i)}R\left(x,0,k+\frac{1}{2}\right)\bar{a}_{x+k+\frac{1}{2}}^{i}\tag{9.4.3}$$

式（9.4.2）、式（9.4.3）与式（9.3.7）、式（9.3.8）的区别主要在于：式（9.4.2）和式（9.4.3）用的是残疾终止力、残疾退休概率和相应的残疾者的年金精算现值因子。

［例 9.4.1］ 某养老金计划提供的残疾退休给付是最后年薪的 50%，但不超过最后年薪的 70% 与从社会保险中获得的最初残疾收入额之差。加入者必须工作 3 年以上并在 65 岁以前因残疾而退休时才能获得这个给付。设在年龄 y 至 $y+1$ 岁（$30\leqslant y<65$）间因残疾退休的预期最初社会保险残疾收入为 I_y，对年龄 30 岁、年薪 15000 元的加入者，求其在养老金计划中的残疾收入给付额的表达式。

解：当 $k=0$，1，2 时，$R\left(30,0,k+\frac{1}{2}\right)=0$

当 $3\leqslant k\leqslant 34$ 时，有

$$R\left(30,0,k+\frac{1}{2}\right)=\min\left(7500\frac{S_{30+k}}{S_{30}},10500\frac{S_{30+k}}{S_{30}}-I_{30+k}\right)$$

若等式右边小于 0，则 $R\left(30,0,k+\frac{1}{2}\right)=0$，即仅能获得由社会保险提供的给付。

§9.5 解约给付及捐纳金的退还

在养老金计划中一般有两种类型的解约保障：（1）提供一个预期年金，（2）一次性退还捐纳金的积累值。

我们先考虑前一种类型。在加入计划一定年数后，加入者在解约时可以获得一个延期年金。举一个例子，我们假设解约给付延期年金在 60 岁开始给付，年给付额为 f 乘以到解约时的工作年数和解约时的年薪；此外，若必须工作 10 年以后才能获得这个年金，那么年给付额为

$$R(x,h,t)=\begin{cases}0 & h+t<10\\ f\cdot(h+t)(ES)_{x+h+t} & 10\leqslant h+t<60-x\end{cases}$$

其精算现值近似地等于

$$\sum_{k=l}^{59-x-h} v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_kp_{x+h}^{(\tau)} q_{x+h+k}^{(w)} R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right)_{60-x-h-k-\frac{1}{2}|}\bar{a}_{x+h+k+\frac{1}{2}}^{r} \tag{9.5.1}$$

其中 $l=\max[10-h,\ 0]$。式中使用 $\bar{a}^r$，表示这个延期年金在 60 岁时的精算现值是以年老退休者生命表为基础计算的，即假设年老退休者生命表适用于解约者。

对于员工需缴付捐纳金的养老金计划，如果计划加入者在有资格领取退休金之前解约，那么作为一次性给付，通常退还其捐纳金的积累值。这种一次性给付也通常给付于在工作期间死亡的员工的遗属。这里我们只考虑在计算过去已缴捐纳金在解约时的积累值的精算现值，这些捐纳金都根据已知的年薪来确定。未来将要缴付的捐纳金在解约时的积累值的精算现值的计算较复杂，在此我们不做讨论。

我们用 $(ATPC)_{x+h}$ 表示现年 $x+h$ 岁的计划加入者按过去各年利率计算的已缴捐纳金到计算期的积累值，并假设该积累值还能以年利率 j 积累。那么在 $x+h+t$ 岁解约时，这部分捐纳金的退还额由下式给出

$$B(x,h,t)=(ATPC)_{x+h}(1+j)^t$$

其精算现值近似地等于

$$(ATPC)_{x+h}\sum_{k=0}^{\beta-x-h-1} v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_kp_{x+h}^{(\tau)} q_{x+h+k}^{(w)}(1+j)^{k+\frac{1}{2}} \tag{9.5.2}$$

其中 β 是有资格获得即期或延期退休给付的年龄，显然有 $\beta>x+h$；并假设到达年龄 β 后不再有解约退还金。

若加入者当年的捐纳金为年薪的 $c\%$，且假设在当年解约的平均退还值为一半，即 $\frac{1}{2}(0.01c)(AS)_{x+h}$；在此后第 $k+1$ 年解约的平均退还值约为 $(0.01c)(AS)_{x+h}(1+j)^k$。因此，这部分捐纳金到解约时的退还额的精算现值为

$$0.01c(AS)_{x+h}\left[\frac{1}{2}v^{\frac{1}{2}}q_{x+h}^{(w)}+\sum_{k=1}^{\beta-x-h-1} v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_kp_{x+h}^{(\tau)} q_{x+h+k}^{(w)}(1+j)^k\right] \tag{9.5.3}$$

若各年捐纳金的积累利率与估值所用的折现利率相同，即 $j=i$，则式（9.5.2）与式（9.5.3）中的计算可大为简化。这时式（9.5.2）可简化为

$$(ATPC)_{x+h}\sum_{k=0}^{\beta-x-h-1} {}_kp_{x+h}^{(\tau)} q_{x+h+k}^{(w)}=(ATPC)_{x+h}\frac{l_{x+h}^{(w)}-l_{\beta}^{(w)}}{l_{x+h}^{(\tau)}}$$

其中 $l_y^{(w)}$ 是年龄为 y 的 $l_y^{(\tau)}$ 个计划加入者中将在未来解约的人数。

因此，式（9.5.3）可简化为

$$\begin{aligned}
&0.01c(AS)_{x+h}v^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}q_{x+h}^{(w)}+\sum_{k=1}^{\beta-x-h-1} {}_kp_{x+h}^{(\tau)} q_{x+h+k}^{(w)}\right]\\
&=0.01c(AS)_{x+h}v^{\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{2}\left[l_{x+h}^{(w)}-l_{x+h+1}^{(w)}\right]+l_{x+h+1}^{(w)}-l_{\beta}^{(w)}}{l_{x+h}^{(\tau)}}\\
&=0.01c(AS)_{x+h}v^{\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{2}\left[l_{x+h}^{(w)}+l_{x+h+1}^{(w)}\right]-l_{\beta}^{(w)}}{l_{x+h}^{(\tau)}}
\end{aligned}$$

至此，就可以根据多元风险表进行精算现值的计算。

表 9-1 养老金函数表例表

x	$l_x^{(\tau)}$	$q_x^{(d)}$	$q_x^{(w)}$	$q_x^{(i)}$	$q_x^{(r)}$	S_x
30	100000	0.0010	0.1999	0	0	1.00
31	79910	0.0010	0.1799	0	0	1.06
32	65454	0.0011	0.1506	0	0	1.13
33	55524	0.0011	0.1027	0	0	1.20
34	49761	0.0012	0.0798	0	0	1.28
35	45730	0.0014	0.0589	0.0010	0	1.36
36	42927	0.0015	0.0449	0.0010	0	1.44
37	40893	0.0016	0.0350	0.0011	0	1.54
38	39352	0.0018	0.0300	0.0012	0	1.63
39	38053	0.0019	0.0260	0.0013	0	1.74
40	36943	0.0021	0.0220	0.0014	0	1.85
41	36000	0.0023	0.0200	0.0015	0	1.96
42	35143	0.0026	0.0180	0.0016	0	2.09
43	34363	0.0028	0.0160	0.0017	0	2.22
44	33656	0.0031	0.0150	0.0018	0	2.36
45	32989	0.0034	0.0140	0.0020	0	2.51
46	32349	0.0038	0.0130	0.0022	0	2.67
47	31734	0.0042	0.0130	0.0025	0	2.84
48	31109	0.0046	0.0120	0.0028	0	3.02
49	30506	0.0051	0.0110	0.0031	0	3.21
50	29919	0.0056	0.0100	0.0034	0	3.41
51	29350	0.0062	0.0100	0.0038	0	3.63
52	28763	0.0069	0.0090	0.0042	0	3.86
53	28185	0.0074	0.0089	0.0047	0	4.10
54	27593	0.0082	0.0079	0.0052	0	4.35
55	27006	0.0089	0.0079	0.0058	0	4.62
56	26396	0.0098	0.0069	0.0064	0	4.91
57	25786	0.0107	0.0069	0.0071	0	5.21
58	25149	0.0118	0.0059	0.0079	0	5.53
59	24505	0.0129	0.0049	0.0087	0	5.86
60	23856	0.0131	0	0	0.1489	6.21
61	19991	0.0149	0	0	0.0794	6.56
62	18106	0.0157	0	0	0.1487	6.93
63	15130	0.0179	0	0	0.0892	7.31
64	13509	0.0190	0	0	0.1485	7.70
65	11246	0.0181	0	0	0.3955	8.08
66	6594	0.0223	0	0	0.1975	8.48
67	5145	0.0231	0	0	0.2958	8.91
68	3504	0.0237	0	0	0.3941	9.35
69	2040	0.0240	0	0	0.4922	9.82
70	987	0.0172	0	0	0.9828	10.31

习 题 九

1. 假设对于年龄为 30 岁的新加入者，因考虑通货膨胀的影响及工作能力的提高，每年以 5% 的比率增加工资，另外，假设在 40 岁、50 岁和 60 岁时于原有工资上再增加 10%。

(1) 在上述假设下构造一个薪金比例函数 S_{30+k}；

(2) 若开始年薪为 12000 元，捐纳金按各年年薪的 10% 缴纳，求捐纳金精算现值的表达式。

2. 计划的资助者每年为每个计划加入者缴纳其年薪超过某一定额部分的 10%。设此定额在这一年为 10000 元，并每年按 5% 增加，对现年 35 岁，年薪 25000 元的加入者，求资助者为其缴纳的捐纳金的精算现值。

3. 1 月 1 日生日的现年 61 岁、年薪 40000 元的养老金计划新加入者，每年生日可望加薪，年薪增长函数为 $S_k=(1.06)^k$，设退休发生在年初并在年薪增长之前，其他终止事件发生在年中，给定利率 $i=0.05$ 及养老金函数表如表 9-2 所示：

表 9-2

x	$l_x^{(\tau)}$	$q_x^{(d)}$	$q_x^{(w)}$	$q_x^{(r)}$
61	100	8	0	0
62	92	12	0	0
63	80	0	8	0
64	72	0	0	12
65	60	0	0	60

若除退休那年之外，捐纳金按年薪的 6% 在每年年初缴付，求该加入者在 63 岁和 64 岁所缴捐纳金的精算现值。

4. 在第 3 题中，若退休金的年给付额为最后两年平均年薪的 3% 乘以工作年数，求该加入者在 65 岁退休时的退休金年给付额。

5. 刚好在 60 岁退休的计划加入者有三种年给付额选择：

(1) 工作 25 年以内每年 450 元 + 超过 25 年每年 350 元；

(2) 工作年数 ×（退休前 3 年平均年薪的 1% + 退休前 3 年平均年薪超过 30000 元的部分的 0.5%）；

(3) 工作年数 ×（整个工作期平均年薪的 2% + 整个工作期平均年薪超过 20000 元部分的 1%）。

若某加入者正好在 30 岁时加入计划，起始年薪为 10000 元，每年增加 5%，求其在 60 岁退休时能得到的最大年给付额。

6. 在一个扣除计划中，退休年给付额为最后 3 年的平均年薪的 2% 乘以工作年数，减去一个等于最后 3 年平均年薪 25% 的社会保险年给付额的 35%。若年薪在每年末增加，

年薪增长函数 $S_{40+k}=(1.05)^k$，求在30岁加入计划、现年40岁、年薪40000元的员工在65岁退休时的年给付额。

7. 某养老金保险的退休给付为每工作一年每月给付20元。某职工30岁参加养老金计划，60岁退休，退休金每月发放一次。若（1）$\ddot{a}^{(12)}_{60|i=6\%}=10$；（2）${}_{20}p_{40}=0.885$。试计算40岁时未来给付的精算现值。

8. 一个25岁的新加入者，现年年薪是12000元。当他在第 $k+1$ 年内退休时，某分段给付计划为其提供的年收入为：

年收入＝工作整年数×（最后3年平均年薪不超过15000 $(1.04)^k$ 元部分的1%＋最后3年平均年薪超过15000 $(1.04)^k$ 元部分的1.5%）

试写出给付额函数的表达式。

9. 一种扣除计划其扣除额为工作年数乘以社会保险收入的2%，但不超过社会保险收入的50%。在扣除之前，年给付额为工作年数乘以最后3年平均年薪的2%。在下列情况下，对年薪为30000元的40岁的新加入者，试写出其给付额公式，

（1）恰好在65岁退休，预期的社会保险收入为 I_{65}；

（2）在68岁至69岁之间退休，预期的社会保险收入为 $I_{68.5}$。

10. 在例9.3.6中，如果假设所有的人都在63岁退休，那么精算现值该如何简化？

11. 某计划中，65岁前的给付额为工作年数乘以最后3年平均年薪的2%，65岁后则为工作年数乘以最后3年平均年薪的1.33%，对于30岁时加入计划、现年50岁，而年薪36000元的加入者，如果最低退休年龄为55岁，限定退休年龄为68岁，求其未来给付的精算现值。

12. 在上题中，如果确定给付额时最多只算35年工龄，试写出未来给付的精算现值公式。

13. 在第10题的条件下，试写出相应于30岁到50岁这段工作期的未来给付精算现值公式。

14. 某全期平均计划提供的退休收入为加入者整个工作期薪金总额的2%，最低退休年龄为58岁，限定退休年龄为68岁。对30岁开始工作、现年50岁的加入者，若其过去总薪金为400000元，而目前年薪为36000元，写出下列各量的表达式：

（1）恰在65岁退休时的给付额；

（2）在65岁至66岁之间退休时的平均给付额；

（3）相应于过去工作期的退休给付的精算现值；

（4）相应于未来工作期的退休给付的精算现值。

15. 在第3题中，若加入者在工作期间死亡，其遗属可立即得到数额为5000元乘以工作年数的一笔死亡给付。试求此死亡给付在61岁的精算现值。

16. 对于现年50岁、具有20年工龄而年薪为25000元的加入者，其残疾给付额的计算如例9.5.1所述。若该加入者在当年年中致残而 $I_{50}=8000$，求其残疾给付在致残时的精算现值。

17. 某年龄为35岁的加入者，其过去捐纳金的积累值为5000元。如果继续参加计划，到40岁就有资格获得延期年金。假设捐纳金以每年6%的实际利率积累，求他在40岁前解约时应获退还的过去捐纳金的积累值的精算现值。

18. 年初正好 65 岁的年薪 50000 元的养老金计划加入者，在其工作期间每年初缴付年薪的 2% 作为捐纳金。若 $i=0.06$，$S_{65+k}=(1.06)^k$，$k=1, 2, \cdots$，试根据本章附录例表（表 9.1）计算当年及往后各年捐纳金在 65 岁时的精算现值。

19. 某公司准备为员工提供一个确定给付计划或一个确定缴费计划。在正常的退休年龄 65 岁，确定给付计划提供一个按月给付的退休年金，年给付额为最后 5 年平均年薪的 25%；在确定缴费计划中，公司在每年末将为每个加入者存入相当于其年薪 6% 的捐纳金，其年给付额由账户积累额除以年金精算现值因子 11.351 确定。

若：

(1) 某计划加入者在 1 月 1 日正好 x 岁，$x<60$；

(2) 年薪在 1 月 1 日是 25000 元，以后每年将在 1 月 1 日加薪 5%。

试求：

(1) 该计划加入者最后 5 年的平均年薪；

(2) 到正常退休年龄时账户上的积累额；

(3) 两种计划年给付额最接近的年龄 x。

20. 某养老金计划提供一个年给付额为最后 3 年平均年薪的 2% 乘以工作年数的基本给付。如果加入者在 65 岁之前退休，可得到一个年给付额为基本给付额一半的给付到 65 岁的补充给付。最低退休年龄为 60 岁，限定退休年龄为 70 岁，对在 70 岁以前的退休者均假设在年中退休，一些加入者直到满 70 岁才退休，年薪在每年末增加。

已知：

$$\sum_{k=15}^{19} {}_3Z_{45+k}v^{k+\frac{1}{2}}{}_kp_{45}^{(\tau)}q_{45+k}^{(r)}\bar{a}^r_{45+k+\frac{1}{2}:\overline{20-k-\frac{1}{2}|}}=17.94$$

$$\sum_{k=15}^{19}\left(k+\frac{1}{2}\right){}_3Z_{45+k}v^{k+\frac{1}{2}}{}_kp_{45}^{(\tau)}q_{45+k}^{(r)}\bar{a}^r_{45+k+\frac{1}{2}:\overline{20-k-\frac{1}{2}|}}=296.01$$

$$\sum_{k=15}^{24} {}_3Z_{45+k}v^{k+\frac{1}{2}}{}_kp_{45}^{(\tau)}q_{45+k}^{(r)}\bar{a}^r_{45+k+\frac{1}{2}}=165.88$$

$$\sum_{k=15}^{24}\left(k+\frac{1}{2}\right){}_3Z_{45+k}v^{k+\frac{1}{2}}{}_kp_{45}^{(\tau)}q_{45+k}^{(r)}\bar{a}^r_{45+k+\frac{1}{2}}=3151.94$$

$${}_3Z_{70}v^{25}{}_{25}p_{45}^{(\tau)}\bar{a}^r_{70}=11.84$$

$$S_{45}=20.00$$

对现年 45 岁、年薪 40000 元、在 25 岁加入计划的人，计算：

(1) 基本给付在 45 岁的精算现值；

(2) 补充给付在 45 岁的精算现值；

(3) 相应于 25 岁到 45 岁这段工作期的给付在 45 岁的精算现值。

21. (1) 把式 (9.5.3) 中相应于在当年解约的项

$$0.01c(AS)_{x+h}\frac{1}{2}v^{\frac{1}{2}}q_{x+h}^{(w)}$$

改写成一个二重积分，其中一个变量为捐纳金缴纳时间（设为连续缴纳），另一个变量为解约时间，从前一时间到后一时间按年利率 j 计息。

(2) 在多元风险模型中，假设解约服从均匀分布，求 (1) 中的二重积分值。

(3) 令 $i=0.06$ 和 $j=0.04$，分别按式 (9.5.3) 中第一项和第 (2) 中的积分进行计算，并比较其结果。

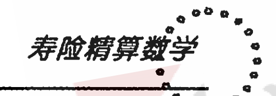
22. 对一份残疾收入保险，若 (1) 被保险人保持残疾状态，他/她将获得每年 20000 元的连续给付；(2) 支付年数服从参数为 2 和 1 的伽玛分布；(3) 支付立即开始；(4) 贴现率 $\delta=0.05$。试计算在残疾发生时该残疾给付的精算现值。

附　　表

附表Ⅰ（A）中国人寿保险业经验生命表 CL1（1990—1993）（男）
（B）中国人寿保险业经验生命表 CL2（1990—1993）（女）
（C）中国人寿保险业经验生命表 CL3（1990—1993）（混合表）

附表Ⅱ（A）离散型换算函数表（根据附表Ⅰ（C）生命表和年利率 i＝0.06 编制）
（B）连续型换算函数表（根据附表Ⅰ（C）生命表和年利率 i＝0.06 编制）

附表Ⅲ　中国人寿保险业经验生命表（2000—2003）及换算表
非养老金业务男性表 CL1（2000—2003）
非养老金业务女性表 CL2（2000—2003）
养老金业务男性表 CL3（2000—2003）
养老金业务女性表 CL4（2000—2003）



附表 I (A)　　中国人寿保险业经验生命表 CL1 (1990—1993) (男)

年龄 (x)	死亡率 q_x	生存人数 l_x	死亡人数 d_x	生存人年数 L_x	生存人年数 T_x	平均余命 $\mathring{e}_x$
0	0.003307	1000000	3037	998482	73641337	73.64
1	0.002157	996963	2150	995888	72642855	72.86
2	0.001611	994813	1603	994011	71646967	72.02
3	0.001250	993210	1242	992589	70652956	71.14
4	0.001000	991968	922	911472	69660367	70.22
5	0.000821	990976	814	990570	68668894	69.29
6	0.000690	990163	683	989821	67678325	68.35
7	0.000593	989480	587	989186	66688504	67.4
8	0.000520	988893	514	988636	65699317	66.44
9	0.000468	988379	463	988147	64710682	65.47
10	0.000437	987916	432	987700	63722534	64.5
11	0.000432	987484	427	987271	62734834	63.53
12	0.000458	987058	452	986832	61747563	62.56
13	0.000516	986606	509	986351	60760731	61.59
14	0.000603	986097	595	985799	59774380	60.62
15	0.000706	985502	696	985154	58788581	59.65
16	0.000812	984806	800	984406	57803427	58.7
17	0.000907	984007	892	983560	56819020	57.74
18	0.000981	983114	964	982632	55835460	56.79
19	0.001028	982150	1010	981645	54852828	55.85
20	0.001049	981140	1029	980652	53871183	54.91
21	0.001048	980111	1027	979597	52890558	53.96
22	0.001030	979084	1008	978579	50910961	53.02
23	0.001003	978075	981	977585	50932381	52.07
24	0.000972	977094	950	976619	45954797	51.13
25	0.000945	976144	922	975683	48978178	50.18
26	0.000925	975222	902	974771	48002494	49.22

续表

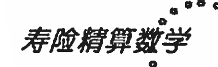
年龄 (x)	死亡率 q_x	生存人数 l_x	死亡人数 d_x	生存人年数 L_x	T_x	平均余命 $\mathring{e}_x$
27	0.000915	974320	892	973874	47027723	48.27
28	0.000918	973428	894	972982	46053849	47.31
29	0.000933	972535	907	970081	45080868	46.35
30	0.000963	971627	936	971160	44108787	45.4
31	0.001007	970692	977	970203	43137627	44.44
32	0.001064	969714	1032	969198	42167424	43.48
33	0.001136	968682	1100	968132	41198226	42.53
34	0.001222	967582	1182	966991	40230094	41.58
35	0.001321	966400	1277	965761	39263103	40.63
36	0.001436	965123	1386	964430	38297341	39.68
37	0.001565	963737	1508	962983	37332911	38.74
38	0.001710	962299	1645	961406	36369928	37.8
39	0.001872	960583	1798	959684	35408522	36.86
40	0.002051	958785	1966	957802	34488838	35.93
41	0.002250	956819	2153	955742	33491036	35
42	0.002470	954666	2358	953487	32535294	34.08
43	0.002713	952308	2584	951016	31581807	33.16
44	0.002981	949724	2831	948309	30630791	32.25
45	0.003276	946893	3102	945342	29682482	31.35
46	0.003601	943791	3399	942092	28737140	30.45
47	0.003958	940393	3722	938532	27795048	29.56
48	0.004352	936670	4076	934632	26856516	28.67
49	0.004784	932594	4462	930363	25921884	27.8
50	0.005260	928133	4882	925692	24991521	26.93
51	0.005783	923251	5339	920581	24065829	26.07
52	0.006358	917911	5836	914993	23145248	25.22
53	0.006991	912075	6376	908887	22230255	24.37

续表

年龄 (x)	死亡率 q_x	生存人数 l_x	死亡人数 d_x	生存人年数		平均余命 $\mathring{e}_x$
				L_x	T_x	
54	0.007686	905696	6961	902218	21321368	23.54
55	0.008449	898738	7593	894941	20419149	22.72
56	0.009288	891144	8277	877066	19524208	21.91
57	0.010210	882867	9014	878360	18637202	21.11
58	0.011222	873853	9806	868950	17758842	20.32
59	0.012333	864047	10656	858719	16889892	19.55
60	0.013553	853391	11566	847608	16031173	18.79
61	0.014892	841825	12536	835556	15183565	18.04
62	0.016361	829288	13538	822504	14348009	17.3
63	0.017972	815720	14660	808390	13525504	16.58
64	0.019740	801060	15813	793154	12717114	15.88
65	0.021677	785247	17022	776736	11923961	15.18
66	0.023800	768225	18284	759084	11147224	14.51
67	0.026125	749942	19592	740146	10388141	13.85
68	0.028671	730349	20940	719879	9647995	13.21
69	0.031457	709410	22316	698252	8928116	12.59
70	0.034504	687094	23707	675240	8229864	11.98
71	0.037835	663386	25099	650837	7554624	11.39
72	0.041474	638287	26472	625051	6903788	10.82
73	0.045446	611815	27805	597912	6278737	10.26
74	0.049779	584010	29071	569474	5680825	9.73
75	0.054501	554939	30245	539816	5111350	9.21
76	0.059644	524694	31295	509047	4571534	8.71
77	0.065238	493399	32188	477305	4062487	8.23
78	0.071317	461211	32892	444765	3585182	7.77
79	0.077916	428319	33373	411632	3140418	7.33
80	0.085069	394946	33598	378147	2728786	6.91

续表

年龄 (x)	死亡率 q_x	生存人数 l_x	死亡人数 d_x	生存人年数		平均余命 $\mathring{e}_x$
				L_x	T_x	
81	0.092813	361348	33538	344579	2350639	6.51
82	0.101184	327810	33169	311226	2006060	6.12
83	0.110218	294641	32475	278404	1694834	5.75
84	0.119951	262166	31447	246443	1416430	5.4
85	0.130418	230719	30090	215674	1169987	5.07
86	0.141651	200629	28419	186420	954313	4.76
87	0.153681	172210	26465	158977	767893	4.46
88	0.166534	145745	24271	133609	608916	4.18
89	0.180233	121473	21893	110526	475307	3.91
90	0.194795	99580	19398	89881	364781	3.66
91	0.210233	80182	16875	71754	274900	3.43
92	0.266550	63325	14346	56152	203146	3.21
93	0.243742	48979	11938	43010	146994	3
94	0.261797	37041	9697	32192	103985	2.81
95	0.280694	27344	7675	23506	71793	2.63
96	0.300399	19668	5908	16714	48287	2.46
97	0.320871	13760	4415	11552	31573	2.29
98	0.342055	9345	3196	7747	20020	2.14
99	0.363889	6148	2237	5030	12274	2
100	0.386299	3911	1511	3156	7244	1.85
101	0.409200	2400	982	1909	4088	1.7
102	0.432503	1418	613	1111	2179	1.54
103	0.456108	805	367	621	1068	1.33
104	0.479911	438	210	333	446	1.02
105	1.000000	228	228	114	114	0.5



附表 I（B）　中国人寿保险业经验生命表 CL2（1990—1993）（女）

年龄 (x)	死亡率 q_x	生存人数 l_x	死亡人数 d_x	生存人年数 L_x	T_x	平均余命 $\mathring{e}_x$
0	0.002765	1000000	2765	998618	77762282	77.76
1	0.001859	997235	1854	996308	76763665	76.98
2	0.001314	995381	1308	994727	75767357	76.12
3	0.000966	994073	960	993593	74772630	75.22
4	0.000734	993113	729	992748	73779037	74.29
5	0.000573	992384	569	992100	72786288	73.34
6	0.000458	991815	454	991588	71749189	723.29
7	0.000375	991361	372	991175	70802600	71.42
8	0.000315	990989	312	990833	69811425	70.45
9	0.000274	990677	271	990541	68820592	69.47
10	0.000249	990406	247	990282	67830050	68.49
11	0.000240	990159	238	990040	66839768	67.5
12	0.000248	989921	246	989799	65849728	66.52
13	0.000269	989676	266	989543	64859929	65.54
14	0.000302	989410	299	989260	63870386	64.55
15	0.000341	989111	337	988942	62881126	63.57
16	0.000382	988774	378	988585	61892183	62.59
17	0.000421	988396	416	988188	60903599	61.62
18	0.000454	987980	449	987756	59915411	60.64
19	0.000481	987531	475	987294	58927655	59.67
20	0.000500	987056	494	986810	57940361	58.7
21	0.000511	986563	504	986311	56953552	57.73
22	0.000517	986059	510	985804	55967241	56.76
23	0.000519	985549	511	986293	54981437	55.79
24	0.000519	985037	511	984782	53996144	54.82
25	0.000519	984526	511	984271	53011362	53.84
26	0.000520	984015	512	983759	52027092	52.87

续表

年龄 (x)	死亡率 q_x	生存人数 l_x	死亡人数 d_x	生存人年数 L_x	生存人年数 T_x	平均余命 $\dot{e}_x$
27	0.000525	983503	516	983245	51043333	51.9
28	0.000533	982987	524	982725	28060087	50.93
29	0.000546	982463	536	982195	49077362	49.95
30	0.000566	981927	556	981649	48095167	48.98
31	0.000592	981371	581	981081	47113518	48.01
32	0.000625	980790	613	980484	46132438	47.04
33	0.000666	980177	653	979851	45151954	46.07
34	0.000714	979524	699	979175	44172104	45.1
35	0.000772	978825	756	978447	43192929	44.13
36	0.000838	978069	820	977659	42214482	43.16
37	0.000914	977250	893	976803	41236823	42.2
38	0.001001	976356	977	975868	40260152	41.23
39	0.001098	975379	1071	974844	39284152	40.28
40	0.001208	974308	1177	973720	38309308	39.32
41	0.001331	973131	1259	972483	37335589	38.37
42	0.001468	971836	1427	971123	36363105	37.42
43	0.001620	970409	1572	969623	35391983	36.47
44	0.001790	968837	1734	967970	34422360	35.53
45	0.001979	967103	1914	966146	33454390	34.59
46	0.002188	965189	2112	964133	32488244	33.66
47	0.002420	963077	2331	961912	31524111	32.73
48	0.002677	960747	2572	959461	30562199	31.81
49	0.002962	958175	2838	956756	29602738	30.89
50	0.003277	955337	3131	953771	28645982	29.99
51	0.003627	952206	3454	950479	27692211	29.08
52	0.004014	948752	3808	946848	26741732	28.19
53	0.004442	944944	4197	942845	25794884	27.3

续表

年龄	死亡率	生存人数	死亡人数	生存人年数		平均余命
(x)	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\mathring{e}_x$
54	0.004916	940746	4625	938434	24852039	26.42
55	0.005440	936122	5093	933576	23913605	25.55
56	0.006020	931029	5605	928227	22980029	24.68
57	0.006661	925424	6164	922342	22051802	23.83
58	0.007370	919260	6775	915873	21129460	22.99
59	0.008154	912485	7440	908765	20213587	22.15
60	0.009022	905045	8165	900962	19304822	21.33
61	0.009980	896880	8951	892404	18403860	20.52
62	0.011039	887929	9802	883028	17511456	19.72
63	0.012209	878127	10721	872766	15628428	18.94
64	0.013502	867406	11712	861550	15755662	18.16
65	0.014929	855694	12775	849307	14894112	17.41
66	0.016505	842919	13912	835963	14044805	16.66
67	0.018244	829077	15124	821445	13208842	15.93
68	0.020162	813883	16410	805687	12387397	15.22
69	0.022278	797473	17766	788590	11581719	14.52
70	0.024610	779707	19189	770113	10793129	13.84
71	0.027180	760518	20671	750183	10023016	13.18
72	0.030009	739848	22202	728747	9272833	12.53
73	0.033123	717645	23771	705760	8544086	11.91
74	0.036549	693875	25360	681195	7838326	11.30
75	0.040313	668514	26950	655040	7157132	10.71
76	0.044447	641565	28516	627307	6502092	10.13
77	0.048984	613049	30030	598034	5874785	9.58
78	0.053958	583019	31459	567290	5276751	9.05
79	0.059405	551561	32765	535178	4709461	8.54
80	0.065364	518795	33911	501840	4174283	8.05

续表

年龄 (x)	死亡率 q_x	生存人数 l_x	死亡人数 d_x	生存人年数 L_x	生存人年数 T_x	平均余命 $\dot{e}_x$
81	0.071876	484885	34852	467459	3672443	7.57
82	0.078981	450033	35544	432261	3204984	7.12
83	0.086722	414489	35945	396517	2772722	6.96
84	0.095145	378544	36017	360536	2376206	6.28
85	0.104291	342527	35723	324666	2015067	5.88
86	0.114207	306805	35039	289285	1691004	5.51
87	0.124933	271766	33952	254789	1401719	5.16
88	0.136511	237813	32464	221581	1146930	4.82
89	0.148980	205349	30593	190053	925349	4.51
90	0.162374	174756	28376	160568	735296	4.21
91	0.176721	146380	25868	133446	574728	3.93
92	0.192046	120512	23144	108940	441282	3.66
93	0.208364	97368	20228	87224	332342	3.41
94	0.225680	77080	17395	68382	245118	3.18
95	0.243992	59685	14563	52403	176736	2.96
96	0.263285	45122	11880	39182	124333	2.76
97	0.283531	33242	9425	28529	85151	2.56
98	0.304690	23817	7257	20189	56621	2.38
99	0.326708	16560	5410	13855	36433	2.2
100	0.349518	11150	3897	9201	22578	2.02
101	0.373037	7253	2706	5900	13376	1.84
102	0.397173	4547	1806	3644	7476	1.64
103	0.421820	2741	1156	2163	3832	1.4
104	0.446863	1585	708	1231	1669	1.05
105	1.000000	877	877	438	438	0.5

附表Ⅰ(C)　中国人寿保险业经验生命表 CL3(1990—1993)(混合表)

年龄 (x)	死亡率 q_x	生存人数 l_x	死亡人数 d_x	生存人年数 L_x	生存人年数 T_x	平均余命 $\mathring{e}_x$
0	0.002909	1000000	2909	998546	75673158	75.67
1	0.002016	997091	2010	996086	74674612	74.89
2	0.001470	995081	1463	994349	73678526	74.04
3	0.001114	993618	1107	993065	72684177	73.15
4	0.000872	992518	865	992078	71691112	72.23
5	0.000702	991646	696	991298	70699034	71.29
6	0.000579	990950	574	990663	69707736	70.34
7	0.000489	990376	484	990134	68717074	69.38
8	0.000421	989892	417	989683	67726940	68.42
9	0.000374	989475	370	989290	66737257	67.45
10	0.000346	989105	342	988934	65747967	66.47
11	0.000339	988763	335	988595	64759033	65.5
12	0.000356	988427	352	988251	63770738	64.52
13	0.000396	988075	391	987880	62782187	63.54
14	0.000457	987684	451	987458	61794307	62.56
15	0.000529	987233	522	986972	60806849	61.59
16	0.000602	986711	594	986414	59819877	60.63
17	0.000670	986117	661	985786	58833463	59.66
18	0.000724	985456	713	985099	57847677	58.70
19	0.000762	984742	750	984367	56862578	57.74
20	0.000778	983992	766	983609	55878211	56.79
21	0.000784	983226	771	982841	54894602	55.83
22	0.000780	982456	766	982072	53991761	54.87
23	0.000767	981689	753	981313	52929688	53.92
24	0.000752	980936	738	980568	51948375	52.96
25	0.000738	980199	723	979837	50967808	52.00
26	0.000728	979475	713	979119	49987971	51.04

续表

年龄 (x)	死亡率 q_x	生存人数 l_x	死亡人数 d_x	生存人年数 L_x	T_x	平均余命 $\dot{e}_x$
27	0.000727	978762	712	978406	49008852	50.07
28	0.000730	978051	714	977694	48030446	49.11
29	0.000743	977337	726	976974	47052752	48.14
30	0.000773	976611	755	976233	46075779	47.18
31	0.000809	975856	789	975461	45099545	46.22
32	0.000855	975066	834	974649	44124085	45.25
33	0.000910	974232	887	973789	43149435	44.29
34	0.000976	973346	950	972871	42175646	43.33
35	0.001057	972396	1028	971882	41202775	42.37
36	0.001146	971368	1113	970812	40230893	41.42
37	0.001249	970255	1212	969649	39260082	40.46
38	0.001366	969043	1324	968381	38290433	39.51
39	0.001497	967719	1449	966995	37322051	38.57
40	0.001650	966271	1594	965474	36355056	37.62
41	0.001812	964676	1748	963802	35389583	36.69
42	0.001993	962928	1919	961969	34425781	35.75
43	0.002193	961009	2107	959955	33463812	34.82
44	0.002409	958902	2310	957747	32503856	33.9
45	0.002658	956592	2543	955320	31546110	32.98
46	0.002933	954049	2789	952650	30590789	32.06
47	0.003231	951251	3073	949714	29638139	31.16
48	0.003558	948117	3374	946491	28688425	30.26
49	0.003925	944804	3708	942950	27741935	29.36
50	0.004322	941095	4067	939062	26798985	28.48
51	0.004770	937028	4470	934793	25859923	27.6
52	0.005263	932558	4908	930104	24925130	26.73
53	0.005790	927650	5371	924965	23955026	25.87

续表

年龄 (x)	死亡率 q_x	生存人数 l_x	死亡人数 d_x	生存人年数		平均余命 $\mathring{e}_x$
				L_x	T_x	
54	0.006367	922279	5872	919343	23070061	25.01
55	0.007005	916407	6419	913197	22150718	24.17
56	0.007735	909988	7039	906468	21237520	23.34
57	0.008524	902949	7697	899101	20331052	22.52
58	0.009386	895252	8403	891051	19431952	21.71
59	0.010349	886849	9178	822860	18540901	20.91
60	0.011378	867671	9986	872678	17658640	20.12
61	0.012508	867685	10853	862859	16785962	19.53
62	0.013779	856832	11806	850929	15923704	18.58
63	0.015167	845026	12817	838618	15072755	17.84
64	0.016672	832209	13875	825272	14234157	17.1
65	0.018275	818335	14995	810857	13408855	16.39
66	0.020107	803380	16154	795303	12598028	16.58
67	0.022111	787226	17406	778523	11802725	14.99
68	0.024315	769820	18718	760461	11024202	14.32
69	0.026701	751102	20055	741074	10263741	13.66
70	0.029296	731046	21417	720338	9522667	13.03
71	0.032152	709630	22816	698222	8802329	12.4
72	0.035305	686814	24248	674690	8104107	11.8
73	0.038746	662566	25672	649730	7429417	11.21
74	0.042465	636894	27046	623371	6779688	10.64
75	0.046582	609848	28408	595644	6156316	10.09
76	0.051078	581440	29699	566531	5560672	9.56
77	0.055926	551742	30857	536313	4994081	9.05
78	0.061236	520885	31897	504936	4457768	8.56
79	0.066958	488988	32742	472617	3952832	8.08
80	0.073092	456246	33348	439572	3480215	7.63

续表

年龄 (x)	死亡率 q_x	生存人数 l_x	死亡人数 d_x	生存人年数 L_x	生存人年数 T_x	平均余命 $\mathring{e}_x$
81	0.079092	422898	33757	406020	3040642	7.19
82	0.087192	389141	33930	372176	2634622	6.77
83	0.095102	355211	33781	338321	2262446	6.37
84	0.103653	321430	33317	304771	1924126	5.99
85	0.112047	288113	32550	271838	1619354	5.62
86	0.123047	255563	31446	239840	1347516	5.27
87	0.133927	224117	30015	209109	1107676	4.94
88	0.145631	194101	28267	179968	898567	4.63
89	0.158079	165834	26215	152727	718599	4.33
90	0.171599	139619	23959	127640	565873	4.05
91	0.185702	115661	21478	104922	438233	3.79
92	0.200967	94182	18928	84719	333311	3.54
93	0.217252	75255	16349	67080	248952	3.3
94	0.234450	58906	13810	52000	181512	3.08
95	0.253233	45095	11420	39385	129512	2.87
96	0.272344	33676	9171	29090	90127	2.68
97	0.292664	24504	7172	20918	61037	2.49
98	0.314651	17333	5454	14606	40118	2.31
99	0.336441	11879	3997	9881	25512	2.15
100	0.358080	7882	2823	6471	15632	1.98
101	0.381455	5060	1930	4095	9161	1.81
102	0.405397	3130	1269	2495	5066	1.62
103	0.429801	1681	800	1461	2570	1.38
104	0.454556	1061	482	820	1109	1.05
105	1.000000	579	579	289	289	0.5

附表 II (A)　离散型换算函数表（根据附表 I (C) 生命表和年利率 i = 0.06 编制）

x	C_x	M_x	D_x	N_x	R_x	S_x
0	2744.34	27346.5	1000000	17183534	1065453	284752641
1	1788.893	24602.16	940651.9	16183534	1038106	267569107
2	1228.363	22813.27	885618.5	15242882	1013504	251385573
3	876.8477	21584.91	834260.8	14357263	990690.8	236142691
4	646.3783	20708.06	786161.7	13523003	969105.9	221785428
5	490.6525	20061.68	741015.6	12736841	948397.8	208262425
6	381.7428	19571.03	698580.6	11995825	928336.1	195525584
7	303.6676	19189.29	658656.6	11297245	908765.1	183529759
8	246.8217	18885.62	621070.5	10638588	889575.8	172232514
9	206.6061	18638.8	585668.7	10017518	870690.2	161593926
10	180.1613	18432.19	552311.1	9431849	852051.4	151576409
11	166.4847	18252.03	520868	8879538	833619.2	142144560
12	165.0313	18085.55	491217.9	8358670	815367.2	133265022
13	172.9397	17920.52	463248.1	7867452	797281.6	124906352
14	188.1865	17747.58	436853.6	7404204	779361.1	117038901
15	205.4834	17559.39	411937.8	6967350	761613.5	109634697
16	220.5905	17353.91	388415.1	6555412	744054.1	102667347
17	231.5772	17133.32	366208.8	6166997	726700.2	96111934
18	235.6558	16901.74	345248.4	5800788	709566.9	89944937
19	233.8535	16666.08	325470	5455540	692665.2	84144149
20	225.323	16432.23	306813.4	5130070	675999.1	78688609
21	213.9564	16206.91	289221.2	4823257	659566.9	73558539
22	200.5367	15992.95	272636.5	4534035	643360	68735282
23	185.9748	15792.41	257003.5	4261399	627367	64201247
24	171.953	15606.44	242270.1	4004395	611574.6	59939848
25	158.9227	15434.48	228385	3762125	595968.2	55935453
26	147.8533	15275.56	215298.4	3533740	580533.7	52173328
27	139.2887	15127.71	202963.9	3318442	565258.1	48639588

续表

x	C_x	M_x	D_x	N_x	R_x	S_x
28	131.7735	14988.42	191336.3	3115478	550130.4	45321146
29	126.404	14856.65	180374.1	2924142	535142	42205668
30	124.0124	14730.24	170037.9	2743767	520285.4	39281527
31	122.2614	14606.23	160289.1	2573730	505555.1	36537759
32	121.9193	14483.97	151093.7	2413441	490948.9	33964030
33	122.3275	14362.05	142419.3	2262347	476464.9	31550589
34	123.6	14239.72	134235.6	2119928	462102.9	29288242
35	126.1775	14116.12	126513.8	1985692	447863.1	27168315
36	128.8778	13989.94	119226.5	1859178	433747	25182623
37	132.3975	13861.07	112348.9	1739952	419757.1	23323445
38	136.4455	13728.67	105857.1	1627603	405896	21583493
39	140.8749	13592.22	99728.78	1521746	392167.3	19955890
40	146.2002	13451.35	93942.98	1422017	378575.1	18434145
41	151.2499	13305.15	88479.16	1328074	365123.8	17012128
42	156.6472	13153.9	83319.66	1239595	351818.6	15684054
43	162.2581	12997.25	78446.8	1156275	338664.7	14444459
44	167.8217	12834.99	73844.16	1077828	325667.5	13288184
45	174.2916	12667.17	69496.48	1003984	312832.5	12210356
46	180.9139	12492.88	65388.43	934487.6	300165.3	11206372
47	187.4481	12311.97	61506.28	869099.1	287672.4	10271885
48	194.1591	12124.52	57837.28	807592.8	275360.5	9402785.6
49	201.3012	11930.36	54369.37	749755.6	263235.9	8595192.7
50	208.2932	11729.06	51090.51	695386.2	251305.6	7845437.2
51	215.9745	11520.76	47990.3	644295.7	239576.5	7150051
52	223.7143	11304.79	45057.89	596305.4	228055.8	6505755.3
53	230.9609	11081.08	42283.73	5551247.5	216751	5909449.9

续表

x	C_x	M_x	D_x	N_x	R_x	S_x
54	238.2119	10850.11	39659.35	508963.8	205669.9	5358202.4
55	245.6625	10611.9	37176.27	469304.4	194819.8	4849238.6
56	254.1421	10366.24	34826.29	432128.1	184207.9	4379934.2
57	262.169	10112.1	32600.85	397301.9	173841.6	3947806.1
58	270.0153	9849.929	30493.35	364701	163729.5	3550504.2
59	278.225	9579.914	28497.29	334207.7	153879.6	3185803.2
60	285.5839	9301.689	26606.02	305710.4	144299.7	2851595.5
61	292.8102	9016.105	24814.43	279104.4	134998	2545885.2
62	300.4922	8723.295	23117.03	254289.9	125981.9	2266780.8
63	307.7592	8422.802	21508.03	231172.9	117258.6	2012490.9
64	314.3053	8115.043	19982.83	209664.9	108835.8	1781318
65	319.5945	7800.738	18537.45	189682	100720.8	1571653.1
66	325.677	7481.143	17168.56	171144.6	92920.03	1381971.1
67	331.055	7155.466	15871.08	153976	85438.89	1210826.5
68	335.8573	6824.411	14641.66	138104.9	78283.42	1056850.5
69	339.4784	6488.554	13477.03	123463.3	71459.01	918745.52
70	342.0127	6149.076	12374.68	109986.3	64970.46	795282.23
71	343.7298	5807.063	11332.23	97611.57	58821.38	685295.97
72	344.6258	5463.333	10347.06	86279.34	53014.32	587684.4
73	344.2117	5118.707	9416.749	75932.28	47550.98	501405.06
74	342.1079	4774.496	8539.513	66515.53	42432.28	425472.78
75	338.9963	4432.388	7714.037	57976.02	37657.78	358957.25
76	334.3414	4093.392	6938.397	50261.98	33225.39	300981.23
77	327.7149	3759.05	6211.327	43323.59	29132	250719.25
78	319.5851	3431.335	5532.028	37112.26	25372.95	207395.66
79	309.4824	3111.75	4899.309	31580.23	21941.62	170283.4

续表

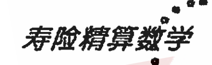
x	C_x	M_x	D_x	N_x	R_x	S_x
80	297.3683	2802.268	4312.507	26680.92	18829.87	138703.17
81	283.9768	2504.899	3771.035	22368.41	16027.6	112022.25
82	269.2756	2220.923	3273.603	18597.38	13522.7	89653.836
83	252.918	1951.647	2819.029	15323.78	11301.78	71056.457
84	235.3246	1698.729	2406.544	12504.75	9350.129	55732.681
85	216.8935	1463.404	2035	10098.2	7651.4	43227.935
86	197.6765	1246.511	1702.917	8063.203	6187.996	33129.732
87	178.0009	1048.834	1408.849	6360.286	4941.485	25066.528
88	158.1458	870.8333	1151.096	4951.437	3892.651	18706.242
89	138.3636	712.6875	927.794	3800.341	3021.818	13754.805
90	119.2985	574.3238	736.9137	2872.547	2309.13	9954.4647
91	100.8914	455.0253	575.9081	2135.633	1734.807	7081.918
92	83.88016	354.1339	442.4134	1559.725	1279.781	4946.2851
93	68.35021	270.2538	333.4954	1117.311	925.6473	3386.5603
94	54.46738	201.9035	246.2681	783.8159	655.3935	2269.249
95	42.4916	147.4362	177.8571	537.5478	453.49	1485.433
96	32.19199	104.9446	125.3018	359.6907	306.0538	947.88523
97	23.7501	72.75258	86.01378	234.3889	201.1093	588.19452
98	17.03862	49.00248	57.39829	148.3751	128.3567	353.80564
99	11.78006	31.96386	37.11071	90.9768	79.35422	205.43055
100	7.849075	20.18379	23.23004	53.8661	47.39036	114.45374
101	5.06243	12.33472	14.06883	30.63606	27.20657	60.587647
102	3.140201	7.272288	8.210055	16.56723	14.87185	29.951587
103	1.867583	4.132086	4.605134	8.35717	7.599565	13.384361
104	1.061527	2.264503	2.476882	3.752037	3.467479	5.0271909
105	1.202976	1.202976	1.275154	1.275154	1.202976	1.2751542

附表 II（B） 连续型换算函数表（根据附表 I（C）生命表和年利率 i = 0.06 编制）

x	$\bar{C}_x$	$\bar{M}_x$	D_x	N_x	$\bar{R}_x$	S_x
0	2825.471	28154.95	1000000	17183.534	1096.951	284752641
1	1841.778	25329.48	940651.9	16183534	1068796	267569107
2	1264.677	23487.7	885618.5	15242.882	1043466	251385573
3	902.7699	22223.02	834260.8	14357263	1019979	236142691
4	665.4872	21320.25	786161.7	13523.003	997755.6	221785428
5	505.1577	20654.77	741015.6	12736841	976435.3	208262425
6	393.0283	20149.61	698580.6	11995825	955780.5	195525584
7	312.6449	19756.58	658656.6	11297245	935630.9	18.529759
8	254.1185	19443.94	621070.5	10638588	915874.4	172232514
9	212.714	19189.82	585668.7	10017518	896430.4	161593926
10	185.4874	18977.1	552311.1	9431849	877240.6	151576409
11	171.4065	18791.62	520868	8879538	858263.5	142144560
12	169.9102	18620.21	491217.9	8358670	839471.9	133265022
13	178.0523	18450.3	463248.1	7867452	820851.7	124906352
14	193.7499	18272.25	436853.6	7404204	802401.4	117038901
15	211.5581	18078.5	411937.8	6967350	784129.1	109634697
16	227.1118	17866.94	388415.1	6555412	766050.6	102667347
17	238.4234	17639.83	366208.8	6166997	748183.7	96111934
18	242.6225	17401.4	345248.4	5800788	730543.9	89944937
19	240.767	17158.78	325470	5455540	713142.5	84144149
20	231.9843	16918.01	306813.4	5130070	695983.7	78688609
21	220.2816	16686.03	289221.2	4823257	679065.7	73558539
22	206.4652	16465.75	272636.5	4534035	662379.6	68735282
23	191.4728	16259.28	257003.5	4261399	645913.9	64201247
24	177.0364	16067.81	242270.1	4004395	629654.6	59939848
25	163.6209	15890.77	228385	3762125	613586.8	55935453
26	152.2243	15727.15	215298.4	3533740	597696	52173328
27	143.4065	15574.93	202963.9	3318442	581968.9	48639588

续表

x	$\bar{C}_x$	$\bar{M}_x$	D_x	N_x	$\bar{R}_x$	S_x
28	135.6691	15431.52	191336.3	3115478	566393.9	45321146
29	130.1408	15295.85	180374.1	2924142	550962.4	42205668
30	127.6786	15165.71	170037.9	2743767	535666.6	39281527
31	125.8758	15038.03	160289.1	2573730	520500.8	36537759
32	125.5236	14912.16	151093.7	2413441	505462.8	33964030
33	125.9439	14786.63	142419.3	2262347	490550.7	31550589
34	127.2539	14660.69	134235.6	2119928	475764	29288242
35	129.9077	14533.44	126513.8	1985692	461103.3	27168315
36	132.6878	14403.53	119226.5	1859178	446569.9	25182623
37	136.3116	14270.84	112348.9	1739952	432166.4	23323445
38	140.4792	14134.53	105857.1	1627603	417895.5	21583493
39	145.0396	13994.05	99728.78	1521746	403761	19955890
40	150.5223	13849.01	93942.98	1422017	389766.9	18434145
41	155.7213	13698.49	88479.16	1328074	375917.9	17012128
42	161.2782	13542.77	83319.66	1239595	362219.4	15684054
43	167.055	13381.49	78446.8	1156275	348676.7	14444459
44	172.783	13214.43	73844.16	1077828	335295.2	13288184
45	179.4442	13041.65	69496.48	1003984	322080.8	12210356
46	186.2623	12862.21	65388.43	934487.6	309039.1	11206372
47	192.9896	12675.94	61506.28	869099.1	296176.9	10271885
48	199.899	12482.95	57837.28	807592.8	283500.9	9402785.6
49	207.2523	12283.06	54369.37	749755.6	271018	8595192.7
50	214.451	12075.8	51090.51	695386.2	258734.9	7845437.2
51	222.3594	11861.35	47990.3	644295.7	246659.1	7150051
52	230.3279	11638.99	45057.89	596305.4	234797.8	6505755.3
53	237.7888	11408.67	42283.73	551247.5	223158.8	5909449.9



续表

x	$\bar{C}_x$	$\bar{M}_x$	D_x	N_x	$\bar{R}_x$	S_x
54	245.2542	11170.88	39659.35	508963.8	211750.1	5358202.4
55	252.9251	10925.62	37176.27	469304.4	200579.2	4849238.6
56	261.6553	10672.7	34826.29	432128.1	189653.6	4379934.2
57	269.9195	10411.04	32600.85	397301.9	178980.9	3947806.1
58	277.9977	10141.12	30493.35	364701	168569.9	3550504.2
59	286.4502	9863.125	28497.29	334207.7	158428.8	3185803.2
60	294.0267	9576.675	26606.02	305710.4	148565.6	2851595.5
61	301.4665	9282.648	24814.43	279104.4	138989	2545885.2
62	309.3757	8981.181	23117.03	254289.9	129706.3	2266780.8
63	316.8575	8671.806	21508.03	231172.9	120725.1	2012490.9
64	323.5971	8354.948	19982.83	209664.9	112053.3	1781318
65	329.0427	8031.351	18537.45	189682	103698.4	1571653.1
66	335.305	7702.308	17168.56	171144.6	95667.03	1381971.1
67	340.842	7367.003	15871.08	153976	87964.72	1210826.5
68	345.7862	7026.162	14641.66	138104.9	80597.71	1056850.5
69	349.5144	6680.375	13477.03	123463.3	73571.55	918745.52
70	352.1236	6330.861	12374.68	109986.3	66891.18	795282.23
71	353.8915	5978.737	11332.23	97611.57	60560.32	685295.97
72	354.814	5624.846	10347.06	86279.34	54581.58	587684.4
73	354.3877	5270.032	9416.749	75932.28	48956.73	501405.06
74	352.2217	4915.644	8539513	66515.53	43686.7	425472.78
75	349.018	4563.423	7714.037	57976.02	38771.06	358957.25
76	344.2256	4214.405	6938.397	50261.98	34207.64	300981.23
77	337.4032	3870.179	6211.327	43323.59	29993.23	250719.25
78	329.033	3532.776	5532.028	37112.26	26123.05	207395.66
79	318.6317	3203.743	4899.309	31580.23	22590.28	170283.4

续表

x	$\bar{C}_x$	$\bar{M}_x$	D_x	N_x	$\bar{R}_x$	S_x
80	306.1594	2885.111	4312.507	26680.92	19386.53	138703.17
81	292.372	2578.952	3771.035	22368.41	16501.42	112022.25
82	277.2362	2286.58	3273.603	18597.38	13922.47	89653.836
83	260.3951	2009.343	2819.029	15323.78	11635.89	71056.457
84	242.2815	1748.948	2406.544	12504.75	9626.547	55732.681
85	223.3055	1506.667	2035	10098.2	7877.599	43227.935
86	203.5205	1283.361	1702.917	8063.203	6370.932	33129.732
87	183.2631	1079.841	1408.849	6360.286	5087.571	25066.528
88	162.8211	896.5777	1151.096	4951.437	4007.73	18706.242
89	142.4541	733.7567	927.794	3800.341	3111.152	13754.805
90	122.8253	591.3026	736.9137	2872.547	2377.395	9954.4647
91	103.8741	468.4773	575.9081	2135.633	1786.093	7081.918
92	86.35991	364.6032	442.4134	1559.725	1317.615	4946.2851
93	70.37085	278.2433	333.4954	1117.311	953.0122	3386.5603
94	56.0776	207.8724	246.2681	783.8159	674.769	2269.249
95	43.74778	151.7948	177.8571	537.5478	466.8965	1485.433
96	33.14368	108.047	125.3018	359.6907	315.1017	947.88523
97	24.45223	74.90337	86.01378	234.3889	207.0547	588.19452
98	17.54234	50.45114	57.39829	148.3751	132.1513	353.805064
99	12.12832	32.9088	37.11071	90.9768	81.70017	205.4355
100	8.081117	20.78049	23.23004	53.8661	48.79137	114.45374
101	5.212091	12.69937	14.06883	30.63606	28.01088	60.587647
102	3.233035	7.487279	8.210055	16.56723	15.31151	29.951587
103	1.922795	4.254243	4.605134	8.35717	7.824231	13.384361
104	1.090909	2.331449	2.476882	3.752037	3.569988	5.0271909
105	1.238539	1.238539	1.275154	1.275154	1.238539	1.2751542



附表 III　　中国人寿保险业经验生命表（2000—2003）及换算表

非养老金业务男性表 CL1（2000—2003）　　（i = 0.02）

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
0	0.000722	1000000	722	707.8431	1000000	227274.6	39408993
1	0.000603	999278	602.5646	579.1663	979684.3	226566.8	38408993
2	0.000499	998675.4	498.339	469.596	959895.7	225987.6	37429309
3	0.000416	998177.1	415.2417	383.6191	940604.6	225518	36469413
4	0.000358	997761.9	357.1987	323.5259	921777.7	225134.4	35528809
5	0.000323	997404.7	322.1617	286.0704	903380.1	224810.9	34607031
6	0.000309	997082.5	308.0985	268.2183	885380.7	224524.8	33703651
7	0.000308	996774.4	307.0065	262.0271	867752.1	224256.6	32818270
8	0.000311	996467.4	309.9014	259.3116	850475.3	223994.6	31950518
9	0.000312	996157.5	310.8011	254.9652	833540	223735.3	31100043
10	0.000312	995846.7	310.7042	249.8879	816941.1	223480.3	30266503
11	0.000312	995536	310.6072	244.9117	800672.8	223230.4	29449561
12	0.000313	995225.4	311.5055	240.8039	784728.4	222985.5	28648889
13	0.00032	994913.9	318.3724	241.2865	769100.8	222744.7	27864160
14	0.000336	994595.5	334.1841	248.3037	753779.1	222503.4	27095059
15	0.000364	994261.3	361.9111	263.6326	738750.8	222255.1	26341280
16	0.000404	993899.4	401.5354	286.7615	724001.9	221991.5	25602530
17	0.000455	993497.9	452.0415	316.5011	709519	221704.7	24878528
18	0.000513	993045.8	509.4325	349.6901	695290.3	221388.2	24169009
19	0.000572	992536.4	567.7308	382.0666	681307.5	221038.5	23473718
20	0.000621	991968.7	616.0125	406.4302	667566.5	220656.5	22792411
21	0.000661	991352.6	655.2841	423.8633	654070.5	220250	22124844
22	0.000692	990697.4	685.5626	434.7536	640821.7	219826.2	21470774
23	0.000716	990011.8	708.8485	440.7063	627821.8	219391.4	20829952
24	0.000738	989303	730.1056	445.0219	615070.9	218950.7	20202130
25	0.000759	988572.8	750.3268	448.3797	602565.7	218505.7	19587059
26	0.000779	987822.5	769.5137	450.8289	590302.3	218057.3	18984494

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
27	0.000795	987053	784.7071	450.7158	578276.9	217606.5	18394191
28	0.000815	986268.3	803.8087	452.6346	566487.4	217155.8	17815915
29	0.000842	985464.5	829.7611	458.0869	554927.2	216703.1	17249427
30	0.000881	984634.7	867.4632	469.511	543588.2	216245	16694500
31	0.000932	983767.3	916.8711	486.5223	532460.1	215775.5	16150912
32	0.000994	982850.4	976.9533	508.2392	521533.2	215289	15618452
33	0.001055	981873.4	1035.876	528.3262	510798.8	214780.8	15096919
34	0.001121	980837.6	1099.519	549.7898	500254.8	214252.4	14586120
35	0.001194	979738	1169.807	573.4666	489896.1	213702.6	14085865
36	0.001275	978568.2	1247.675	599.646	479716.8	213129.2	13595969
37	0.001367	977320.6	1335.997	629.5048	469710.9	212529.5	13116252
38	0.001472	975984.6	1436.649	663.6576	459871.4	211900	12646541
39	0.001589	974547.9	1548.557	701.3265	450190.7	211236.4	12186670
40	0.001715	972999.4	1668.694	740.9171	440662.1	210535	11736479
41	0.001845	971330.7	1792.105	780.1107	431280.7	209794.1	11295817
42	0.001978	969538.6	1917.747	818.4346	422044.1	209014	10864536
43	0.002113	967620.8	2044.583	855.4549	412950.3	208195.6	10442492
44	0.002255	965576.2	2177.374	893.152	403997.8	207340.1	10029542
45	0.002413	963398.9	2324.681	934.8793	395183.1	206447	9625544
46	0.002595	961074.2	2493.987	983.3004	386499.6	205512.1	9230361
47	0.002805	958580.2	2688.817	1039.329	377937.8	204528.8	8843861
48	0.003042	955891.4	2907.822	1101.944	369488	203489.5	8465923
49	0.003299	952983.6	3143.893	1168.044	361141.2	202387.5	8096435
50	0.00357	949839.7	3390.928	1235.122	352891.9	201219.5	7735294
51	0.003847	946448.7	3640.988	1300.201	344737.3	199984.4	7382402
52	0.004132	942807.7	3895.682	1363.874	336677.6	198684.2	7037665
53	0.004434	938912.1	4163.136	1428.931	328712.2	197320.3	6700987

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
54	0.004778	934748.9	4466.23	1502.905	320837.9	195891.4	6372275
55	0.005203	930282.7	4840.261	1596.832	313044.1	194388.4	6051437
56	0.005744	925442.4	5315.741	1719.309	305309.1	192791.6	5738393
57	0.006427	920126.7	5913.654	1875.193	297603.4	191072.3	5433084
58	0.00726	914213	6637.187	2063.355	289892.8	189197.1	5135481
59	0.008229	907575.9	7468.442	2276.249	282145.3	187133.8	4845588
60	0.009313	900107.4	8382.7	2504.802	274336.8	184857.5	4563443
61	0.01049	891724.7	9354.192	2740.284	266452.8	182352.7	4289106
62	0.011747	882370.5	10365.21	2976.92	258488	179612.4	4022653
63	0.013091	872005.3	11415.42	3214.26	250442.7	176635.5	3764165
64	0.014542	860589.9	12514.7	3454.691	242317.8	173421.2	3513722
65	0.016134	848075.2	13682.85	3703.097	234111.7	169966.6	3271405
66	0.017905	834392.3	14939.79	3963.995	225818.2	166263.5	3037293
67	0.019886	819452.6	16295.63	4238.962	217426.4	162299.5	2811475
68	0.022103	803156.9	17752.18	4527.305	208924.2	158060.5	2594048
69	0.024571	785404.7	19298.18	4825.078	200300.3	153533.2	2385124
70	0.027309	766106.6	20921.6	5128.411	191547.8	148708.1	2184824
71	0.03034	745185	22608.91	5433.345	182663.5	143579.7	1993276
72	0.033684	722576	24339.25	5734.488	173648.6	138146.4	1810612
73	0.037371	698236.8	26093.81	6027.327	164509.2	132411.9	1636964
74	0.04143	672143	27846.88	6306.142	155256.2	126384.5	1472455
75	0.045902	644296.1	29574.48	6566.048	145905.8	120078.4	1317198
76	0.050829	614721.6	31245.69	6801.063	136478.9	113512.4	1171293
77	0.056262	583475.9	32827.52	7005.267	127001.8	106711.3	1034814
78	0.062257	550648.4	34281.72	7172.144	117506.3	99706.02	907812
79	0.068871	516366.7	35562.69	7294.254	108030.1	92533.88	790305.7
80	0.076187	480804	36631.01	7366.056	98617.58	85239.62	682275.7

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
81	0.084224	444173	37410.03	7375.202	89317.84	77873.57	583658.1
82	0.093071	406763	37857.84	7317.143	80191.31	70498.37	494340.2
83	0.1028	368905.1	37923.45	7186.102	71301.79	63181.22	414148.9
84	0.113489	330981.7	37562.78	6978.195	62717.61	55995.12	342847.1
85	0.125221	293418.9	36742.21	6691.916	54509.66	49016.93	280129.5
86	0.13808	256676.7	35441.92	6328.522	46748.93	42325.01	225619.9
87	0.152157	221234.8	33662.42	5892.916	39503.76	35996.49	178870.9
88	0.167543	187572.4	31426.44	5393.614	32836.26	30103.57	139367.2
89	0.184333	156145.9	28782.85	4843.042	26798.8	24709.96	106530.9
90	0.202621	127363.1	25806.43	4257.085	21430.29	19866.92	79732.1
91	0.2225	101556.6	22596.35	3654.454	16753	15609.83	58301.81
92	0.244059	78960.29	19270.97	3055.537	12770.06	11955.38	41548.81
93	0.267383	59689.32	15959.91	2480.929	9464.129	8899.84	28778.75
94	0.292544	43729.41	12792.78	1949.613	6797.629	6418.911	19314.62
95	0.319604	30936.63	9887.472	1477.3	4714.729	4469.298	12516.99
96	0.348606	21049.16	7337.864	1074.863	3144.983	2991.998	7802.26
97	0.379572	13711.3	5204.425	747.4048	2008.454	1917.135	4657.276
98	0.412495	8506.873	3509.043	494.0508	1221.668	1169.73	2648.822
99	0.447334	4997.83	2235.699	308.6002	703.6627	675.6792	1427.155
100	0.48401	2762.131	1336.899	180.9178	381.2651	367.079	723.4919
101	0.522397	1425.232	744.5369	98.77993	192.8716	186.1612	342.2268
102	0.562317	680.6951	382.7664	49.78702	90.30984	87.38131	149.3552
103	0.603539	297.9287	179.8116	22.92977	38.75204	37.59429	59.04541
104	0.64577	118.1171	76.27647	9.536139	15.06242	14.66452	20.29337
105	1	41.84062	41.84062	5.128376	5.230944	5.128376	5.230944

非养老金业务男性表 CL1（2000—2003） (i=0.025)

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
0	0.000722	1000000	722	704.3902	1000000	160549.6	34417467
1	0.000603	999278	602.5646	573.5297	974905.4	159845.2	33417467
2	0.000499	998675.4	498.339	462.7573	950553.7	159271.7	32442562
3	0.000416	998177.1	415.2417	376.1885	926906.7	158808.9	31492008
4	0.000358	997761.9	357.1987	315.7116	903923	158432.7	30565101
5	0.000323	997404.7	322.1617	277.799	881560.4	158117	29661178
6	0.000309	997082.5	308.0985	259.1925	859781.1	157839.2	28779618
7	0.000308	996774.4	307.0065	251.9745	838551.6	157580	27919837
8	0.000311	996467.4	309.9014	248.1468	817847.2	157328	27081285
9	0.000312	996157.5	310.8011	242.7974	797651.6	157079.9	26263438
10	0.000312	995846.7	310.7042	236.8016	777953.8	156837.1	25465786
11	0.000312	995536	310.6072	230.9538	758742.6	156600.3	24687833
12	0.000313	995225.4	311.5055	225.9725	740005.7	156369.3	23929090
13	0.00032	994913.9	318.3724	225.3208	721730.8	156143.4	23189084
14	0.000336	994595.5	334.1841	230.7426	703902.3	155918	22467354
15	0.000364	994261.3	361.9111	243.7924	686503.2	155687.3	21763451
16	0.000404	993899.4	401.5354	263.8871	669515.4	155443.5	21076948
17	0.000455	993497.9	452.0415	289.8336	652921.9	155179.6	20407433
18	0.000513	993045.8	509.4325	318.6642	636707.1	154889.8	19754511
19	0.000572	992536.4	567.7308	346.4696	620859	154571.1	19117804
20	0.000621	991968.7	616.0125	366.7654	605369.7	154224.7	18496945
21	0.000661	991352.6	655.2841	380.6314	590237.8	153857.9	17891575
22	0.000692	990697.4	685.5626	388.5064	575461.1	153477.3	17301337
23	0.000716	990011.8	708.8485	391.9048	561037	153088.8	16725876
24	0.000738	989303	730.1056	393.8121	546961.2	152696.9	16164839
25	0.000759	988572.8	750.3268	394.848	533226.9	152303	15617878
26	0.000779	987822.5	769.5137	395.0681	519826.5	151908.2	15084651

续表

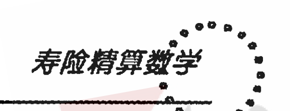
x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
27	0.000795	987053	784.7071	393.0424	506752.7	151513.1	14564825
28	0.000815	986268.3	803.8087	392.7901	493999.9	151120.1	14058072
29	0.000842	985464.5	829.7611	395.5825	481558.3	150727.3	13564072
30	0.000881	984634.7	867.4632	403.47	469417.4	150331.7	13082514
31	0.000932	983767.3	916.8711	416.0491	457564.7	149928.2	12613096
32	0.000994	982850.4	976.9533	432.5001	445988.6	149512.2	12155531
33	0.001055	981873.4	1035.876	447.4006	434678.3	149079.7	11709543
34	0.001121	980837.6	1099.519	463.3055	423629	148632.3	11274865
35	0.001194	979738	1169.807	480.9004	412833.3	148169	10851236
36	0.001275	978568.2	1247.675	500.4011	402283.3	147688.1	10438402
37	0.001367	977320.6	1335.997	522.7556	391971.1	147187.7	10036119
38	0.001472	975984.6	1436.649	548.4285	381888	146664.9	9644148
39	0.001589	974547.9	1548.557	576.7299	372025.3	146116.5	9262260
40	0.001715	972999.4	1668.694	606.3148	362374.8	145539.8	8890235
41	0.001845	971330.7	1792.105	635.2741	352930	144933.5	8527860
42	0.001978	969538.6	1917.747	663.2315	343686.7	144298.2	8174930
43	0.002113	967620.8	2044.583	689.8499	334640.9	143634.9	7831243
44	0.002255	965576.2	2177.374	716.7359	325789.1	142945.1	7496602
45	0.002413	963398.9	2324.681	746.5616	317126.2	142228.4	7170813
46	0.002595	961074.2	2493.987	781.3985	308644.9	141481.8	6853687
47	0.002805	958580.2	2688.817	821.8939	300335.6	140700.4	6545042
48	0.003042	955891.4	2907.822	867.1582	292188.4	139878.5	6244707
49	0.003299	952983.6	3143.893	914.6911	284194.7	139011.3	5952518
50	0.00357	949839.7	3390.928	962.5014	276348.4	138096.7	5668323
51	0.003847	946448.7	3640.988	1008.273	268645.7	137134.2	5391975
52	0.004132	942807.7	3895.682	1052.491	261085.1	136125.9	5123329
53	0.004434	938912.1	4163.136	1097.316	253664.7	135073.4	4862244

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
54	0.004778	934748.9	4466.23	1148.493	246380.4	133976.1	4608579
55	0.005203	930282.7	4840.261	1214.318	239222.7	132827.6	4362199
56	0.005744	925442.4	5315.741	1301.079	232173.7	131613.3	4122976
57	0.006427	920126.7	5913.654	1412.12	225209.8	130312.2	3890803
58	0.00726	914213	6637.187	1546.237	218304.8	128900.1	3665593
59	0.008229	907575.9	7468.442	1697.454	211434	127353.8	3447288
60	0.009313	900107.4	8382.7	1858.781	204579.6	125656.4	3235854
61	0.01049	891724.7	9354.192	2023.609	197731.1	123797.6	3031274
62	0.011747	882370.5	10365.21	2187.633	190884.8	121774	2833543
63	0.013091	872005.3	11415.42	2350.523	184041.4	119586.4	2642658
64	0.014542	860589.9	12514.7	2514.022	177202.1	117235.8	2458617
65	0.016134	848075.2	13682.85	2681.645	170366.1	114721.8	2281415
66	0.017905	834392.3	14939.79	2856.575	163529.2	112040.2	2111049
67	0.019886	819452.6	16295.63	3039.824	156684.1	109183.6	1947520
68	0.022103	803156.9	17752.18	3230.762	149822.7	106143.8	1790836
69	0.024571	785404.7	19298.18	3426.461	142937.7	102913	1641013
70	0.027309	766106.6	20921.6	3624.103	136025	99486.54	1498075
71	0.03034	745185	22608.91	3820.862	129083.2	95862.44	1362050
72	0.033684	722576	24339.25	4012.962	122113.9	92041.57	1232967
73	0.037371	698236.8	26093.81	4197.314	115122.6	88028.61	1110853
74	0.04143	672143	27846.88	4370.053	108117.4	83831.3	995730.5
75	0.045902	644296.1	29574.48	4527.968	101110.3	79461.25	887613.1
76	0.050829	614721.6	31245.69	4667.157	94116.27	74933.28	786502.8
77	0.056262	583475.9	32827.52	4783.84	87153.6	70266.12	692386.5
78	0.062257	550648.4	34281.72	4873.907	80244.06	65482.28	605232.9
79	0.068871	516366.7	35562.69	4932.708	73412.98	60608.37	524988.8
80	0.076187	480804	36631.01	4956.965	66689.71	55675.67	451575.9

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
81	0.084224	444173	37410.03	4938.909	60106.17	50718.7	384886.1
82	0.093071	406763	37857.84	4876.126	53701.26	45779.79	324780
83	0.1028	368905.1	37923.45	4765.441	47515.34	40903.67	271078.7
84	0.113489	330981.7	37562.78	4604.995	41590.99	36138.23	223563.4
85	0.125221	293418.9	36742.21	4394.534	35971.58	31533.23	181972.4
86	0.13808	256676.7	35441.92	4135.623	30699.69	27138.7	146000.8
87	0.152157	221234.8	33662.42	3832.174	25815.3	23003.07	115301.1
88	0.167543	187572.4	31426.44	3490.367	21353.48	19170.9	89485.82
89	0.184333	156145.9	28782.85	3118.788	17342.3	15680.53	68132.34
90	0.202621	127363.1	25806.43	2728.075	13800.53	12561.74	50790.04
91	0.2225	101556.6	22596.35	2330.466	10735.85	9833.67	36989.52
92	0.244059	78960.29	19270.97	1939.028	8143.538	7503.204	26253.66
93	0.267383	59689.32	15959.91	1566.704	6005.887	5564.176	18110.12
94	0.292544	43729.41	12792.78	1225.174	4292.697	3997.472	12104.24
95	0.319604	30936.63	9887.472	923.8345	2962.824	2772.299	7811.54
96	0.348606	21049.16	7337.864	668.89	1966.725	1848.464	4848.716
97	0.379572	13711.3	5204.425	462.8432	1249.866	1179.574	2881.991
98	0.412495	8506.873	3509.043	304.457	756.5387	716.7308	1632.124
99	0.447334	4997.83	2235.699	189.2461	433.6295	412.2738	875.5855
100	0.48401	2762.131	1336.899	110.4049	233.8071	223.0277	441.9559
101	0.522397	1425.232	744.5369	59.98628	117.6996	112.6228	208.1488
102	0.562317	680.6951	382.7664	30.08678	54.84264	52.63656	90.44918
103	0.603539	297.9287	179.8116	13.78909	23.41823	22.54978	35.60655
104	0.64577	118.1171	76.27647	5.706696	9.057967	8.760691	12.18831
105	1	41.84062	41.84062	3.053995	3.130345	3.053995	3.130345

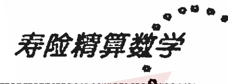


非养老金业务男性表 CL1（2000—2003） (i = 0.03)

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
0	0.000722	1000000	722	700.9709	1000000	114682.8	30395890
1	0.000603	999278	602.5646	567.975	970172.8	113981.8	29395890
2	0.000499	998675.4	498.339	456.0508	941347.4	113413.9	28425717
3	0.000416	998177.1	415.2417	368.9368	913473.4	112957.8	27484370
4	0.000358	997761.9	357.1987	308.1228	886498.5	112588.9	26570897
5	0.000323	997404.7	322.1617	269.8054	860370	112280.8	25684398
6	0.000309	997082.5	308.0985	250.5123	835040.9	112010.9	24824028
7	0.000308	996774.4	307.0065	242.3538	810468.8	111760.4	23988987
8	0.000311	996467.4	309.9014	237.5136	786620.6	111518.1	23178518
9	0.000312	996157.5	310.8011	231.2652	763471.8	111280.6	22391898
10	0.000312	995846.7	310.7042	224.4593	741003.5	111049.3	21628426
11	0.000312	995536	310.6072	217.8537	719196.4	110824.8	20887423
12	0.000313	995225.4	311.5055	212.1201	698031.1	110607	20168226
13	0.00032	994913.9	318.3724	210.4817	677487.9	110394.9	19470195
14	0.000336	994595.5	334.1841	214.5	657544.8	110184.4	18792707
15	0.000364	994261.3	361.9111	225.531	638178.5	109969.9	18135163
16	0.000404	993899.4	401.5354	242.9355	619365.2	109744.4	17496984
17	0.000455	993497.9	452.0415	265.5268	601082.5	109501.4	16877619
18	0.000513	993045.8	509.4325	290.5222	583309.8	109235.9	16276536
19	0.000572	992536.4	567.7308	314.3388	566029.6	108945.4	15693226
20	0.000621	991968.7	616.0125	331.1371	549229	108631	15127197
21	0.000661	991352.6	655.2841	341.9879	532900.9	108299.9	14577968
22	0.000692	990697.4	685.5626	347.3689	517037.5	107957.9	14045067
23	0.000716	990011.8	708.8485	348.7065	501630.8	107610.5	13528029
24	0.000738	989303	730.1056	348.7025	486671.5	107261.8	13026399
25	0.000759	988572.8	750.3268	347.9226	472147.9	106913.1	12539727
26	0.000779	987822.5	769.5137	346.4267	458048.1	106565.2	12067579

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
27	0.000795	987053	784.7071	342.9772	444360.5	106218.8	11609531
28	0.000815	986268.3	803.8087	341.0933	431074.9	105875.8	11165171
29	0.000842	985464.5	829.7611	341.8506	418178.3	105534.7	10734096
30	0.000881	984634.7	867.4632	346.9741	405656.5	105192.9	10315917
31	0.000932	983767.3	916.8711	356.055	393494.3	104845.9	9910261
32	0.000994	982850.4	976.9533	368.337	381677.2	104489.8	9516767
33	0.001055	981873.4	1035.876	379.1773	370192.1	104121.5	9135089
34	0.001121	980837.6	1099.519	390.7508	359030.6	103742.3	8764897
35	0.001194	979738	1169.807	403.6214	348182.6	103351.6	8405867
36	0.001275	978568.2	1247.675	417.9497	337637.8	102947.9	8057684
37	0.001367	977320.6	1335.997	434.5012	327385.7	102530	7720046
38	0.001472	975984.6	1436.649	453.6271	317415.7	102095.5	7392661
39	0.001589	974547.9	1548.557	474.7206	307717	101641.9	7075245
40	0.001715	972999.4	1668.694	496.65	298279.6	101167.1	6767528
41	0.001845	971330.7	1792.105	517.8453	289095.2	100670.5	6469248
42	0.001978	969538.6	1917.747	538.0105	280157.1	100152.6	6180153
43	0.002113	967620.8	2044.583	556.8867	271459.2	99614.64	5899996
44	0.002255	965576.2	2177.374	575.7819	262995.7	99057.75	5628537
45	0.002413	963398.9	2324.681	596.8306	254759.9	98481.97	5365541
46	0.002595	961074.2	2493.987	621.6482	246742.8	97885.14	5110781
47	0.002805	958580.2	2688.817	650.6906	238934.5	97263.49	4864038
48	0.003042	955891.4	2907.822	683.1935	231324.6	96612.8	4625104
49	0.003299	952983.6	3143.893	717.1442	223903.8	95929.61	4393779
50	0.00357	949839.7	3390.928	750.9656	216665.2	95212.46	4169876
51	0.003847	946448.7	3640.988	782.8591	209603.5	94461.5	3953210
52	0.004132	942807.7	3895.682	813.2247	202715.7	93678.64	3743607
53	0.004434	938912.1	4163.136	843.7436	195998.2	92865.41	3540891



续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
54	0.004778	934748.9	4466.23	878.8075	189445.7	92021.67	3344893
55	0.005203	930282.7	4840.261	924.6645	183049.1	91142.86	3155447
56	0.005744	925442.4	5315.741	985.9208	176792.9	90218.2	2972398
57	0.006427	920126.7	5913.654	1064.871	170657.7	89232.28	2795605
58	0.00726	914213	6637.187	1160.347	164622.2	88167.41	2624948
59	0.008229	907575.9	7468.442	1267.642	158667	87007.06	2460325
60	0.009313	900107.4	8382.7	1381.38	152778	85739.42	2301658
61	0.01049	891724.7	9354.192	1496.575	146946.8	84358.04	2148880
62	0.011747	882370.5	10365.21	1610.026	141170.2	82861.46	2001934
63	0.013091	872005.3	11415.42	1721.51	135448.4	81251.44	1860763
64	0.014542	860589.9	12514.7	1832.318	129781.8	79529.93	1725315
65	0.016134	848075.2	13682.85	1945	124169.4	77697.61	1595533
66	0.017905	834392.3	14939.79	2061.819	118607.9	75752.61	1471364
67	0.019886	819452.6	16295.63	2183.433	113091.4	73690.79	1352756
68	0.022103	803156.9	17752.18	2309.315	107614.1	71507.36	1239664
69	0.024571	785404.7	19298.18	2437.309	102170.4	69198.04	1132050
70	0.027309	766106.6	20921.6	2565.382	96757.24	66760.73	1029880
71	0.03034	745185	22608.91	2691.532	91373.68	64195.35	933122.7
72	0.033684	722576	24339.25	2813.13	86020.78	61503.82	841749
73	0.037371	698236.8	26093.81	2928.079	80702.19	58690.69	755728.2
74	0.04143	672143	27846.88	3033.785	75423.56	55762.61	675026
75	0.045902	644296.1	29574.48	3128.153	70192.98	52728.83	599602.5
76	0.050829	614721.6	31245.69	3208.66	65020.37	49600.67	529409.5
77	0.056262	583475.9	32827.52	3272.914	59917.91	46392.01	464389.1
78	0.062257	550648.4	34281.72	3318.347	54899.81	43119.1	404471.2
79	0.068871	516366.7	35562.69	3342.078	49982.44	39800.75	349571.4
80	0.076187	480804	36631.01	3342.21	45184.56	36458.67	299589

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
81	0.084224	444173	37410.03	3313.871	40526.3	33116.46	254404.4
82	0.093071	406763	37857.84	3255.863	36032.05	29802.59	213878.1
83	0.1028	368905.1	37923.45	3166.511	31726.71	26546.73	177846.1
84	0.113489	330981.7	37562.78	3045.044	27636.12	23380.22	146119.3
85	0.125221	293418.9	36742.21	2891.771	23786.14	20335.17	118483.2
86	0.13808	256676.7	35441.92	2708.187	20201.57	17443.4	94697.09
87	0.152157	221234.8	33662.42	2497.293	16904.99	14735.21	74495.52
88	0.167543	187572.4	31426.44	2263.508	13915.32	12237.92	57590.53
89	0.184333	156145.9	28782.85	2012.721	11246.51	9974.413	43675.21
90	0.202621	127363.1	25806.43	1752.026	8906.218	7961.692	32428.71
91	0.2225	101556.6	22596.35	1489.408	6894.787	6209.666	23522.49
92	0.244059	78960.29	19270.97	1233.223	5204.56	4720.258	16627.7
93	0.267383	59689.32	15959.91	991.5881	3819.748	3487.035	11423.14
94	0.292544	43729.41	12792.78	771.6644	2716.905	2495.447	7603.394
95	0.319604	30936.63	9887.472	579.0442	1866.108	1723.783	4886.488
96	0.348606	21049.16	7337.864	417.214	1232.711	1144.739	3020.381
97	0.379572	13711.3	5204.425	287.2928	779.5927	727.5246	1787.67
98	0.412495	8506.873	3509.043	188.063	469.5933	440.2319	1008.077
99	0.447334	4997.83	2235.699	116.3298	267.8528	252.1689	538.4838
100	0.48401	2762.131	1336.899	67.53655	143.7215	135.8391	270.6309
101	0.522397	1425.232	744.5369	36.51651	71.9989	68.30251	126.9094
102	0.562317	680.6951	382.7664	18.22635	33.38533	31.78599	54.91051
103	0.603539	297.9287	179.8116	8.312779	14.18659	13.55965	21.52518
104	0.64577	118.1171	76.27647	3.423592	5.460613	5.246867	7.338586
105	1	41.84062	41.84062	1.823275	1.877974	1.823275	1.877974

非养老金业务女性表 CL2（2000—2003）　　（i=0.02）

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
0	0.000661	1000000	661	648.0392	1000000	207372.3	40424012
1	0.000536	999339	535.6457	514.8459	979744.1	206724.3	39424012
2	0.000424	998803.4	423.4926	399.0666	960018.6	206209.4	38444268
3	0.000333	998379.9	332.4605	307.1421	940795.6	205810.4	37484249
4	0.000267	998047.4	266.4787	241.3579	922041.5	205503.2	36543453
5	0.000224	997780.9	223.5029	198.4642	903720.9	205261.9	35621412
6	0.000201	997557.4	200.509	174.5552	885802.4	205063.4	34717691
7	0.000189	997356.9	188.5005	160.8833	868259.2	204888.8	33831888
8	0.000181	997168.4	180.4875	151.0239	851073.6	204728	32963629
9	0.000175	996987.9	174.4729	143.1285	834234.9	204576.9	32112556
10	0.000169	996813.4	168.4615	135.4873	817734.2	204433.8	31278321
11	0.000165	996645	164.4464	129.6649	801564.7	204298.3	30460586
12	0.000165	996480.5	164.4193	127.1015	785718.1	204168.7	29659022
13	0.000169	996316.1	168.3774	127.609	770184.8	204041.6	28873304
14	0.000179	996147.7	178.3104	132.4873	754955.5	203914	28103119
15	0.000192	995969.4	191.2261	139.2979	740020	203781.5	27348163
16	0.000208	995778.2	207.1219	147.9187	725370.5	203642.2	26608143
17	0.000226	995571.1	224.9991	157.5352	710999.6	203494.2	25882773
18	0.000245	995346.1	243.8598	167.3929	696900.9	203336.7	25171773
19	0.000264	995102.2	262.707	176.7943	683068.8	203169.3	24474872
20	0.000283	994839.5	281.5396	185.753	669498.5	202992.5	23791804
21	0.0003	994558	298.3674	192.9957	656185.3	202806.8	23122305
22	0.000315	994259.6	313.1918	198.6124	643125.9	202613.8	22466120
23	0.000328	993946.4	326.0144	202.6902	630317	202415.2	21822994
24	0.000338	993620.4	335.8437	204.7071	617755.2	202212.5	21192677
25	0.000347	993284.6	344.6697	205.9675	605437.6	202007.8	20574922
26	0.000355	992939.9	352.4937	206.5127	593360.3	201801.8	19969484

续表

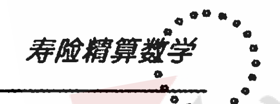
x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
27	0.000362	992587.4	359.3166	206.3823	581519.3	201595.3	19376124
28	0.000372	992228.1	369.1088	207.8497	569910.6	201388.9	18794605
29	0.000386	991859	382.8576	211.3645	558528	201181.1	18224694
30	0.000406	991476.1	402.5393	217.8728	547365.1	200969.7	17666166
31	0.000432	991073.6	428.1438	227.1874	536414.6	200751.8	17118801
32	0.000465	990645.4	460.6501	239.6434	525669.5	200524.6	16582386
33	0.000496	990184.8	491.1317	250.491	515122.6	200285	16056717
34	0.000528	989693.7	522.5582	261.2936	504771.6	200034.5	15541594
35	0.000563	989171.1	556.9033	273.0069	494612.9	199773.2	15036823
36	0.000601	988614.2	594.1571	285.5584	484641.6	199500.2	14542210
37	0.000646	988020	638.2609	300.7404	474853.2	199214.6	14057568
38	0.000699	987381.8	690.1799	318.8274	465241.6	198913.9	13582715
39	0.000761	986691.6	750.8723	340.0629	455800.4	198595.1	13117473
40	0.000828	985940.7	816.3589	362.4717	446523.1	198255	12661673
41	0.000897	985124.4	883.6566	384.6593	437405.3	197892.5	12215150
42	0.000966	984240.7	950.7765	405.7617	428444	197507.9	11777745
43	0.001033	983289.9	1015.738	424.9857	419637.4	197102.1	11349301
44	0.001103	982274.2	1083.448	444.4271	410984.2	196677.1	10929663
45	0.001181	981190.7	1158.786	466.0102	402481.3	196232.7	10518679
46	0.001274	980032	1248.561	492.268	394123.5	195766.7	10116198
47	0.001389	978783.4	1359.53	525.5095	385903.3	195274.4	9722074
48	0.001527	977423.9	1492.526	565.6054	377811.1	194748.9	9336171
49	0.00169	975931.3	1649.324	612.7698	369837.4	194183.3	8958360
50	0.001873	974282	1824.83	664.6817	361972.9	193570.5	8588522
51	0.002074	972457.2	2016.876	720.2285	354210.7	192905.9	8226549
52	0.002295	970440.3	2227.161	779.7267	346545.2	192185.6	7872339
53	0.002546	968213.1	2465.071	846.0969	338970.5	191405.9	7525793

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
54	0.002836	965748.1	2738.862	921.6385	331477.9	190559.8	7186823
55	0.003178	963009.2	3060.443	1009.659	324056.7	189638.2	6855345
56	0.003577	959948.8	3433.737	1110.599	316693	188628.5	6531288
57	0.004036	956515	3860.495	1224.145	309372.7	187517.9	6214595
58	0.004556	952654.5	4340.294	1349.302	302082.4	186293.8	5905223
59	0.005133	948314.2	4867.697	1483.588	294810	184944.5	5603140
60	0.005768	943446.5	5441.8	1626.043	287545.8	183460.9	5308330
61	0.006465	938004.7	6064.201	1776.491	280281.6	181834.8	5020784
62	0.007235	931940.5	6742.59	1936.493	273009.4	180058.3	4740503
63	0.008094	925198	7488.552	2108.564	265719.8	178121.8	4467493
64	0.009059	917709.4	8313.53	2294.956	258401	176013.3	4201774
65	0.010148	909395.9	9228.549	2497.596	251039.4	173718.3	3943373
66	0.011376	900167.3	10240.3	2717.073	243619.4	171220.7	3692333
67	0.01276	889927	11355.47	2953.884	236125.5	168503.7	3448714
68	0.014316	878571.6	12577.63	3207.65	228541.7	165549.8	3212588
69	0.016066	865993.9	13913.06	3478.649	220852.8	162342.1	2984047
70	0.018033	852080.9	15365.57	3766.488	213043.7	158863.5	2763194
71	0.020241	836715.3	16935.95	4070.027	205099.9	155097	2550150
72	0.022715	819779.3	18621.29	4387.298	197008.3	151027	2345050
73	0.025479	801158.1	20412.71	4715.067	188758.1	146639.7	2148042
74	0.028561	780745.3	22298.87	5049.751	180341.9	141924.6	1959284
75	0.031989	758446.5	24261.94	5386.573	171756.1	136874.8	1778942
76	0.035796	734184.5	26280.87	5720.401	163001.7	131488.3	1607186
77	0.040026	707903.7	28334.55	6046.485	154085.2	125767.9	1444184
78	0.044726	679569.1	30394.41	6358.873	145017.4	119721.4	1290099
79	0.049954	649174.7	32428.87	6651.477	135815.1	113362.5	1145081
80	0.055774	616745.8	34398.38	6917.101	126500.6	106711	1009266

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
81	0.062253	582347.4	36252.88	7147.076	117103.1	99793.93	882765.8
82	0.069494	546094.6	37950.3	7335.013	107659.9	92646.86	765662.7
83	0.077511	508144.3	39386.77	7463.387	98213.86	85311.84	658002.9
84	0.086415	468757.5	40507.68	7525.282	88824.71	77848.46	559789
85	0.096294	428249.8	41237.89	7510.721	79557.77	70323.18	470964.3
86	0.107243	387011.9	41504.32	7411.027	70487.09	62812.45	391406.5
87	0.119364	345507.6	41241.17	7219.645	61693.96	55401.43	320919.4
88	0.132763	304266.4	40395.33	6932.914	53264.63	48181.78	259225.5
89	0.147553	263871.1	38934.98	6551.254	45287.31	41248.87	205960.8
90	0.16385	224936.1	36855.79	6079.811	37848.07	34697.61	160673.5
91	0.181775	188080.4	34188.31	5529.194	31026.14	28617.8	122825.4
92	0.201447	153892	31001.09	4915.424	24888.6	23088.61	91799.29
93	0.222987	122891	27403.09	4259.742	19485.16	18173.18	66910.69
94	0.246507	95487.87	23538.43	3587.246	14843.35	13913.44	47425.54
95	0.272115	71949.44	19578.52	2925.253	10965.06	10326.2	32582.18
96	0.299903	52370.92	15706.2	2300.67	7824.808	7400.943	21617.12
97	0.329942	36664.72	12097.23	1737.277	5370.711	5100.273	13792.31
98	0.362281	24567.49	8900.335	1253.111	3528.125	3362.996	8421.599
99	0.396933	15667.16	6218.811	858.401	2205.836	2109.885	4893.474
100	0.433869	9448.345	4099.344	554.7496	1304.183	1251.484	2687.638
101	0.473008	5349.001	2530.12	335.6786	723.8613	696.7347	1383.455
102	0.514211	2818.881	1449.499	188.5386	373.9893	361.0561	659.5934
103	0.557269	1369.381	763.1137	97.31312	178.1175	172.5175	285.6041
104	0.601896	606.2675	364.91	45.62131	77.31192	75.20434	107.4866
105	1	241.3575	241.3575	29.58303	30.17469	29.58303	30.17469

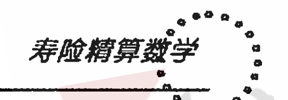


非养老金业务女性表 CL2（2000—2003）（i＝0.025）

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
0	0.000661	1000000	661	644.878	1000000	142764.7	35146646
1	0.000536	999339	535.6457	509.8353	974964.9	142119.9	34146646
2	0.000424	998803.4	423.4926	393.255	950675.4	141610	33171681
3	0.000333	998379.9	332.4605	301.1928	927095	141216.8	32221005
4	0.000267	998047.4	266.4787	235.5283	904181.7	140915.6	31293910
5	0.000224	997780.9	223.5029	192.7259	881892.9	140680.1	30389729
6	0.000201	997557.4	200.509	168.6813	860190.6	140487.3	29507836
7	0.000189	997356.9	188.5005	154.7111	839041.7	140318.6	28647645
8	0.000181	997168.4	180.4875	144.5214	818422.6	140163.9	27808603
9	0.000175	996987.9	174.4729	136.2979	798316.5	140019.4	26990181
10	0.000169	996813.4	168.4615	128.392	778709.1	139883.1	26191864
11	0.000165	996645	164.4464	122.2751	759587.8	139754.7	25413155
12	0.000165	996480.5	164.4193	119.2731	740939	139632.4	24653567
13	0.000169	996316.1	168.3774	119.1653	722748	139513.2	23912628
14	0.000179	996147.7	178.3104	123.1172	705000.9	139394	23189880
15	0.000192	995969.4	191.2261	128.8147	687682.6	139270.9	22484880
16	0.000208	995778.2	207.1219	136.1195	670781	139142.1	21797197
17	0.000226	995571.1	224.9991	144.2617	654284.4	139006	21126416
18	0.000245	995346.1	243.8598	152.5411	638182	138861.7	20472132
19	0.000264	995102.2	262.707	160.3224	622464	138709.2	19833950
20	0.000283	994839.5	281.5396	167.6248	607121.7	138548.8	19211486
21	0.0003	994558	298.3674	173.3111	592146.2	138381.2	18604364
22	0.000315	994259.6	313.1918	177.4849	577530.3	138207.9	18012218
23	0.000328	993946.4	326.0144	180.2453	563266.7	138030.4	17434687
24	0.000338	993620.4	335.8437	181.1509	549348.2	137850.2	16871421
25	0.000347	993284.6	344.6697	181.3772	535768.3	137669	16322073
26	0.000355	992939.9	352.4937	180.9702	522519.4	137487.6	15786304

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
27	0.000362	992587.4	359.3166	179.9737	509594.1	137306.7	15263785
28	0.000372	992228.1	369.1088	180.3692	496985	137126.7	14754191
29	0.000386	991859	382.8576	182.5245	484683	136946.3	14257206
30	0.000406	991476.1	402.5393	187.227	472679	136763.8	13772523
31	0.000432	991073.6	428.1438	194.279	460963	136576.6	13299844
32	0.000465	990645.4	460.6501	203.9312	449525.7	136382.3	12838881
33	0.000496	990184.8	491.1317	212.1224	438357.8	136178.4	12389355
34	0.000528	989693.7	522.5582	220.1909	427454	135966.2	11950997
35	0.000563	989171.1	556.9033	228.9395	416808.1	135746.1	11523543
36	0.000601	988614.2	594.1571	238.2968	406413.1	135517.1	11106735
37	0.000646	988020	638.2609	249.7419	396262.3	135278.8	10700322
38	0.000699	987381.8	690.1799	263.4702	386347.6	135029.1	10304060
39	0.000761	986691.6	750.8723	279.6478	376661	134765.6	9917712
40	0.000828	985940.7	816.3589	296.6215	367194.5	134486	9541051
41	0.000897	985124.4	883.6566	313.2428	357941.9	134189.3	9173857
42	0.000966	984240.7	950.7765	328.8155	348898.4	133876.1	8815915
43	0.001033	983289.9	1015.738	342.714	340059.9	133547.3	8467016
44	0.001103	982274.2	1083.448	356.6435	331423	133204.6	8126956
45	0.001181	981190.7	1158.786	372.1393	322982.9	132847.9	7795533
46	0.001274	980032	1248.561	391.1902	314733.1	132475.8	7472550
47	0.001389	978783.4	1359.53	415.5691	306665.5	132084.6	7157817
48	0.001527	977423.9	1492.526	445.0949	298770.3	131669	6851152
49	0.00169	975931.3	1649.324	479.858	291038.1	131223.9	6552382
50	0.001873	974282	1824.83	517.9709	283459.8	130744.1	6261344
51	0.002074	972457.2	2016.876	558.5194	276028.1	130226.1	5977884
52	0.002295	970440.3	2227.161	601.7092	268737.2	129667.6	5701856
53	0.002546	968213.1	2465.071	649.7416	261580.9	129065.9	5433118

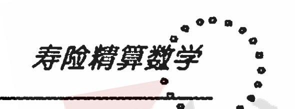


续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
54	0.002836	965748.1	2738.862	704.2997	254551.2	128416.1	5171537
55	0.003178	963009.2	3060.443	767.7996	247638.3	127711.8	4916986
56	0.003577	959948.8	3433.737	840.4399	240830.6	126944	4669348
57	0.004036	956515	3860.495	921.8468	234116.2	126103.6	4428517
58	0.004556	952654.5	4340.294	1011.14	227484.2	125181.7	4194401
59	0.005133	948314.2	4867.697	1106.348	220924.7	124170.6	3966917
60	0.005768	943446.5	5441.8	1206.665	214429.9	123064.3	3745992
61	0.006465	938004.7	6064.201	1311.879	207993.3	121857.6	3531562
62	0.007235	931940.5	6742.59	1423.06	201608.4	120545.7	3323569
63	0.008094	925198	7488.552	1541.951	195268	119122.6	3121961
64	0.009059	917709.4	8313.53	1670.068	188963.4	117580.7	2926693
65	0.010148	909395.9	9228.549	1808.666	182684.5	115910.6	2737729
66	0.011376	900167.3	10240.3	1958.005	176420.1	114102	2555045
67	0.01276	889927	11355.47	2118.274	170159.2	112144	2378625
68	0.014316	878571.6	12577.63	2289.033	163890.7	110025.7	2208465
69	0.016066	865993.9	13913.06	2470.313	157604.3	107736.6	2044575
70	0.018033	852080.9	15365.57	2661.671	151290	105266.3	1886970
71	0.020241	836715.3	16935.95	2862.143	144938.3	102604.7	1735680
72	0.022715	819779.3	18621.29	3070.206	138541.1	99742.52	1590742
73	0.025479	801158.1	20412.71	3283.481	132091.9	96672.32	1452201
74	0.028561	780745.3	22298.87	3499.395	125586.6	93388.83	1320109
75	0.031989	758446.5	24261.94	3714.598	119024.1	89889.44	1194523
76	0.035796	734184.5	26280.87	3925.564	112406.5	86174.84	1075498
77	0.040026	707903.7	28334.55	4129.095	105739.3	82249.28	963091.9
78	0.044726	679569.1	30394.41	4321.239	99031.22	78120.18	857352.5
79	0.049954	649174.7	32428.87	4498.033	92294.59	73798.94	758321.3
80	0.055774	616745.8	34398.38	4654.842	85545.46	69300.91	666026.7

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
81	0.062253	582347.4	36252.88	4786.141	78804.15	64646.07	580481.3
82	0.069494	546094.6	37950.3	4888.035	72095.95	59859.93	501677.1
83	0.077511	508144.3	39386.77	4949.322	65449.48	54971.89	429581.2
84	0.086415	468757.5	40507.68	4966.024	58903.83	50022.57	364131.7
85	0.096294	428249.8	41237.89	4932.238	52501.13	45056.55	305227.9
86	0.107243	387011.9	41504.32	4843.029	46288.38	40124.31	252726.7
87	0.119364	345507.6	41241.17	4694.949	40316.36	35281.28	206438.4
88	0.132763	304266.4	40395.33	4486.494	34638.09	30586.33	166122
89	0.147553	263871.1	38934.98	4218.83	29306.76	26099.84	131483.9
90	0.16385	224936.1	36855.79	3896.134	24373.13	21881.01	102177.1
91	0.181775	188080.4	34188.31	3525.997	19882.53	17984.87	77804.01
92	0.201447	153892	31001.09	3119.303	15871.59	14458.88	57921.47
93	0.222987	122891	27403.09	2690.024	12365.18	11339.57	42049.88
94	0.246507	95487.87	23538.43	2254.292	9373.567	8649.55	29684.7
95	0.272115	71949.44	19578.52	1829.316	6890.651	6395.257	20311.13
96	0.299903	52370.92	15706.2	1431.713	4893.269	4565.941	13420.48
97	0.329942	36664.72	12097.23	1075.839	3342.208	3134.227	8527.212
98	0.362281	24567.49	8900.335	772.2247	2184.852	2058.388	5185.004
99	0.396933	15667.16	6218.811	526.406	1359.338	1286.164	3000.152
100	0.433869	9448.345	4099.344	338.5353	799.7775	759.7577	1640.814
101	0.473008	5349.001	2530.12	203.8482	441.7355	421.2224	841.0367
102	0.514211	2818.881	1449.499	113.9357	227.1132	217.3742	399.3012
103	0.557269	1369.381	763.1137	58.5204	107.6382	103.4384	172.188
104	0.601896	606.2675	364.91	27.30108	46.49244	44.91805	64.54983
105	1	241.3575	241.3575	17.61697	18.05739	17.61697	18.05739

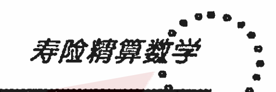


非养老金业务女性表 CL2（2000—2003）　　(i=0.03)

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
0	0.000661	1000000	661	641.7476	1000000	99268.06	30925130
1	0.000536	999339	535.6457	504.8974	970232	98626.31	29925130
2	0.000424	998803.4	423.4926	387.5557	941468	98121.42	28954898
3	0.000333	998379.9	332.4605	295.3868	913659	97733.86	28013430
4	0.000267	998047.4	266.4787	229.8668	886752.2	97438.47	27099771
5	0.000224	997780.9	223.5029	187.1802	860694.6	97208.61	26213019
6	0.000201	997557.4	200.509	163.0322	835438.6	97021.43	25352324
7	0.000189	997356.9	188.5005	148.804	810942.4	96858.39	24516885
8	0.000181	997168.4	180.4875	138.3286	787174	96709.59	23705943
9	0.000175	996987.9	174.4729	129.8242	764108.2	96571.26	22918769
10	0.000169	996813.4	168.4615	121.7002	741722.8	96441.44	22154661
11	0.000165	996645	164.4464	115.3394	719997.5	96319.74	21412938
12	0.000165	996480.5	164.4193	111.9615	698911.4	96204.4	20692941
13	0.000169	996316.1	168.3774	111.3173	678442.8	96092.44	19994029
14	0.000179	996147.7	178.3104	114.4507	658571	95981.12	19315586
15	0.000192	995969.4	191.2261	119.1658	639274.9	95866.67	18657015
16	0.000208	995778.2	207.1219	125.3121	620536.1	95747.5	18017740
17	0.000226	995571.1	224.9991	132.1632	602336.9	95622.19	17397204
18	0.000245	995346.1	243.8598	139.0698	584660.9	95490.03	16794867
19	0.000264	995102.2	262.707	145.4545	567492.9	95350.96	16210207
20	0.000283	994839.5	281.5396	151.3414	550818.5	95205.5	15642714
21	0.0003	994558	298.3674	155.7157	534623.9	95054.16	15091895
22	0.000315	994259.6	313.1918	158.6917	518896.6	94898.45	14557271
23	0.000328	993946.4	326.0144	160.3775	503624.5	94739.75	14038375
24	0.000338	993620.4	335.8437	160.4008	488795.4	94579.38	13534750
25	0.000347	993284.6	344.6697	159.8215	474398.2	94418.98	13045955
26	0.000355	992939.9	352.4937	158.6888	460421	94259.15	12571556

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
27	0.000362	992587.4	359.3166	157.0489	446852	94100.47	12111135
28	0.000372	992228.1	369.1088	156.63	433679.8	93943.42	11664284
29	0.000386	991859	382.8576	157.7322	420891.7	93786.79	11230604
30	0.000406	991476.1	402.5393	161.0105	408475	93629.05	10809712
31	0.000432	991073.6	428.1438	166.2641	396416.7	93468.04	10401237
32	0.000465	990645.4	460.6501	173.6772	384704.3	93301.78	10004820
33	0.000496	990184.8	491.1317	179.7762	373325.7	93128.1	9620116
34	0.000528	989693.7	522.5582	185.7085	362272.3	92948.33	9246790
35	0.000563	989171.1	556.9033	192.1497	351535	92762.62	8884518
36	0.000601	988614.2	594.1571	199.0325	341104	92570.47	8532983
37	0.000646	988020	638.2609	207.5792	330969.9	92371.44	8191879
38	0.000699	987381.8	690.1799	217.9267	321122.4	92163.86	7860909
39	0.000761	986691.6	750.8723	230.185	311551.4	91945.93	7539787
40	0.000828	985940.7	816.3589	242.9713	302246.9	91715.74	7228235
41	0.000897	985124.4	883.6566	255.3407	293200.6	91472.77	6925989
42	0.000966	984240.7	950.7765	266.7336	284405.4	91217.43	6632788
43	0.001033	983289.9	1015.738	276.6585	275855	90950.7	6348382
44	0.001103	982274.2	1083.448	286.5056	267543.8	90674.04	6072527
45	0.001181	981190.7	1158.786	297.5028	259464.7	90387.53	5804984
46	0.001274	980032	1248.561	311.2147	251610	90090.03	5545519
47	0.001389	978783.4	1359.53	329.0047	243970.3	89778.82	5293909
48	0.001527	977423.9	1492.526	350.6695	236535.4	89449.81	5049939
49	0.00169	975931.3	1649.324	376.2225	229295.4	89099.14	4813403
50	0.001873	974282	1824.83	404.1327	222240.6	88722.92	4584108
51	0.002074	972457.2	2016.876	433.6542	215363.5	88318.79	4361867
52	0.002295	970440.3	2227.161	464.9204	208657.1	87885.13	4146504
53	0.002546	968213.1	2465.071	499.5963	202114.8	87420.21	3937847



续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
54	0.002836	965748.1	2738.862	538.918	195728.3	86920.62	3735732
55	0.003178	963009.2	3060.443	584.6551	189488.6	86381.7	3540004
56	0.003577	959948.8	3433.737	636.8618	183384.9	85797.04	3350515
57	0.004036	956515	3860.495	695.1586	177406.7	85160.18	3167130
58	0.004556	952654.5	4340.294	758.7923	171544.3	84465.02	2989723
59	0.005133	948314.2	4867.697	826.2093	165789.1	83706.23	2818179
60	0.005768	943446.5	5441.8	896.7509	160134.1	82880.02	2652390
61	0.006465	938004.7	6064.201	970.2098	154573.2	81983.27	2492256
62	0.007235	931940.5	6742.59	1047.325	149100.9	81013.06	2337683
63	0.008094	925198	7488.552	1129.316	143710.8	79965.74	2188582
64	0.009059	917709.4	8313.53	1217.211	138395.8	78836.42	2044871
65	0.010148	909395.9	9228.549	1311.827	133147.6	77619.21	1906475
66	0.011376	900167.3	10240.3	1413.249	127957.7	76307.38	1773327
67	0.01276	889927	11355.47	1521.506	122817.5	74894.13	1645370
68	0.014316	878571.6	12577.63	1636.177	117718.8	73372.63	1522552
69	0.016066	865993.9	13913.06	1757.183	112653.9	71736.45	1404833
70	0.018033	852080.9	15365.57	1884.108	107615.6	69979.27	1292180
71	0.020241	836715.3	16935.95	2016.181	102597	68095.16	1184564
72	0.022715	819779.3	18621.29	2152.248	97592.58	66078.98	1081967
73	0.025479	801158.1	20412.71	2290.583	92597.83	63926.73	984374.4
74	0.028561	780745.3	22298.87	2429.355	87610.22	61636.15	891776.5
75	0.031989	758446.5	24261.94	2566.236	82629.11	59206.79	804166.3
76	0.035796	734184.5	26280.87	2698.817	77656.2	56640.56	721537.2
77	0.040026	707903.7	28334.55	2824.963	72695.56	53941.74	643881
78	0.044726	679569.1	30394.41	2942.07	67753.25	51116.78	571185.5
79	0.049954	649174.7	32428.87	3047.571	62837.78	48174.71	503432.2
80	0.055774	616745.8	34398.38	3138.505	57959.98	45127.14	440594.4

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
81	0.062253	582347.4	36252.88	3211.368	53133.32	41988.63	382634.4
82	0.069494	546094.6	37950.3	3263.815	48374.38	38777.26	329501.1
83	0.077511	508144.3	39386.77	3288.694	43701.61	35513.45	281126.7
84	0.086415	468757.5	40507.68	3283.774	39140.05	32224.75	237425.1
85	0.096294	428249.8	41237.89	3245.601	34716.27	28940.98	198285.1
86	0.107243	387011.9	41504.32	3171.427	30459.52	25695.38	163568.8
87	0.119364	345507.6	41241.17	3059.534	26400.92	22523.95	133109.3
88	0.132763	304266.4	40395.33	2909.498	22572.43	19464.42	106708.4
89	0.147553	263871.1	38934.98	2722.637	19005.48	16554.92	84135.94
90	0.16385	224936.1	36855.79	2502.178	15729.29	13832.28	65130.46
91	0.181775	188080.4	34188.31	2253.476	12768.97	11330.1	49401.18
92	0.201447	153892	31001.09	1983.879	10143.59	9076.629	36632.2
93	0.222987	122891	27403.09	1702.552	7864.263	7092.75	26488.62
94	0.246507	95487.87	23538.43	1419.846	5932.655	5390.198	18624.35
95	0.272115	71949.44	19578.52	1146.585	4340.014	3970.352	12691.7
96	0.299903	52370.92	15706.2	893.018	3067.02	2823.767	8351.684
97	0.329942	36664.72	12097.23	667.7871	2084.671	1930.749	5284.664
98	0.362281	24567.49	8900.335	477.003	1356.166	1262.962	3199.992
99	0.396933	15667.16	6218.811	323.5824	839.6628	785.9591	1843.826
100	0.433869	9448.345	4099.344	207.0879	491.6242	462.3767	1004.164
101	0.473008	5349.001	2530.12	124.0921	270.2172	255.2889	512.5394
102	0.514211	2818.881	1449.499	69.02142	138.2547	131.1967	242.3222
103	0.557269	1369.381	763.1137	35.27913	65.2064	62.17531	104.0675
104	0.601896	606.2675	364.91	16.37861	28.02805	26.89618	38.86114
105	1	241.3575	241.3575	10.51756	10.83309	10.51756	10.83309

养老金业务男性表 CL3（2000—2003）（i = 0.02）

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
0	0.000627	1000000	627	614.7059	1000000	214176.4	40077005
1	0.000525	999373	524.6708	504.2972	979777.5	213561.7	39077005
2	0.000434	998848.3	433.5002	408.4969	960061.8	213057.4	38097228
3	0.000362	998414.8	361.4262	333.9019	940828.6	212648.9	37137166
4	0.000311	998053.4	310.3946	281.134	922047.1	212315	36196337
5	0.000281	997743	280.3658	248.9568	903686.6	212033.8	35274290
6	0.000269	997462.6	268.3175	233.5865	885718.3	211784.9	34370604
7	0.000268	997194.3	267.2481	228.0937	868117.7	211551.3	33484885
8	0.00027	996927.1	269.1703	225.2297	850867.7	211323.2	32616768
9	0.000271	996657.9	270.0943	221.5714	833958.8	211098	31765900
10	0.000272	996387.8	271.0175	217.9693	817385	210876.4	30931941
11	0.000271	996116.8	269.9477	212.8519	801139.9	210658.4	30114556
12	0.000272	995846.8	270.8703	209.3916	785218.4	210445.6	29313416
13	0.000278	995576	276.7701	209.7572	769612.6	210236.2	28528198
14	0.000292	995299.2	290.6274	215.9404	754312.4	210026.4	27758585
15	0.000316	995008.6	314.4227	229.0399	739306	209810.5	27004273
16	0.000351	994694.2	349.1376	249.341	724580.8	209581.4	26264967
17	0.000396	994345	393.7606	275.6952	710124	209332.1	25540386
18	0.000446	993951.3	443.3023	304.2963	695924.3	209056.4	24830262
19	0.000497	993508	493.7735	332.2954	681974.4	208752.1	24134338
20	0.00054	993014.2	536.2277	353.79	668270.1	208419.8	23452363
21	0.000575	992478	570.6748	369.1348	654813	208066	22784093
22	0.000601	991907.3	596.1363	378.0433	641604.3	207696.9	22129280
23	0.000623	991311.1	617.5868	383.967	628645.8	207318.8	21487676
24	0.000643	990693.6	637.016	388.2809	615935.5	206934.9	20859030
25	0.00066	990056.5	653.4373	390.4806	603470	206546.6	20243095
26	0.000676	989403.1	668.8365	391.8459	591246.8	206156.1	19639625

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
27	0.000693	988734.3	685.1928	393.5573	579261.9	205764.3	19048378
28	0.000712	988049.1	703.4909	396.1444	567510.2	205370.7	18469116
29	0.000734	987345.6	724.7117	400.0922	555986.4	204974.6	17901606
30	0.000759	986620.9	748.8452	405.3095	544684.7	204574.5	17345619
31	0.000788	985872	776.8672	412.2316	533599.3	204169.2	16800935
32	0.00082	985095.2	807.778	420.2293	522724.3	203756.9	16267335
33	0.000855	984287.4	841.5657	429.2222	512054.6	203336.7	15744611
34	0.000893	983445.8	878.2171	439.1328	501585.1	202907.5	15232556
35	0.000936	982567.6	919.6833	450.85	491310.9	202468.4	14730971
36	0.000985	981647.9	966.9232	464.7139	481226.5	202017.5	14239660
37	0.001043	980681	1022.85	481.9539	471326	201552.8	13758434
38	0.001111	979658.1	1088.4	502.7845	461602.4	201070.8	13287108
39	0.001189	978569.7	1163.519	526.9468	452048.6	200568.1	12825506
40	0.001275	977406.2	1246.193	553.3224	442657.9	200041.1	12373457
41	0.001366	976160	1333.435	580.4496	433425	199487.8	11930799
42	0.001461	974826.6	1424.222	607.8133	424346	198907.3	11497374
43	0.00156	973402.4	1518.508	635.3447	415417.7	198299.5	11073028
44	0.001665	971883.9	1618.187	663.775	406636.9	197664.2	10657610
45	0.001783	970265.7	1729.984	695.7194	397999.9	197000.4	10250973
46	0.001918	968535.7	1857.651	732.4132	389500.2	196304.7	9852974
47	0.002055	966678	1986.523	767.866	381130.6	195572.3	9463473
48	0.002238	964691.5	2158.98	818.1635	372889.6	194804.4	9082343
49	0.002446	962532.5	2354.355	874.7084	364759.8	193986.2	8709453
50	0.002666	960178.2	2559.835	932.4021	356733	193111.5	8344693
51	0.00288	957618.4	2757.941	984.8634	348805.8	192179.1	7987960
52	0.003085	954860.4	2945.744	1031.302	340981.6	191194.3	7639155
53	0.0033	951914.7	3141.318	1078.208	333264.4	190163	7298173

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
54	0.003545	948773.3	3363.402	1131.799	325651.6	189084.8	6964909
55	0.003838	945409.9	3628.483	1197.059	318134.5	187953	6639257
56	0.004207	941781.5	3962.075	1281.483	310699.5	186755.9	6321123
57	0.004676	937819.4	4385.243	1390.541	303325.8	185474.4	6010423
58	0.005275	933434.1	4923.865	1530.721	295987.7	184083.9	5707097
59	0.006039	928510.3	5607.274	1708.998	288653.3	182553.2	5411109
60	0.006989	922903	6450.169	1927.35	281284.5	180844.2	5122456
61	0.007867	916452.8	7209.734	2112.072	273841.7	178916.8	4841172
62	0.008725	909243.1	7933.146	2278.424	266360.2	176804.7	4567330
63	0.009677	901310	8721.976	2455.862	258859	174526.3	4300970
64	0.010731	892588	9578.362	2644.113	251327.5	172070.4	4042111
65	0.0119	883009.6	10507.81	2843.813	243755.4	169426.3	3790783
66	0.013229	872501.8	11542.33	3062.541	236132.1	166582.5	3547028
67	0.014705	860959.5	12660.41	3293.336	228439.5	163520	3310896
68	0.016344	848299.1	13864.6	3535.864	220667	160226.6	3082456
69	0.018164	834434.5	15156.67	3789.585	212804.3	156690.8	2861789
70	0.020184	819277.8	16536.3	4053.463	204842.1	152901.2	2648985
71	0.022425	802741.5	18001.48	4326.092	196772.1	148847.7	2444143
72	0.024911	784740	19548.66	4605.793	188587.7	144521.6	2247371
73	0.027668	765191.4	21171.31	4890.296	180284.1	139915.8	2058783
74	0.030647	744020	22801.98	5163.685	171858.9	135025.5	1878499
75	0.033939	721218.1	24477.42	5434.412	163325.4	129861.9	1706640
76	0.037577	696740.6	26181.42	5698.756	154688.5	124427.5	1543315
77	0.041594	670559.2	27891.24	5951.884	145956.7	118728.7	1388626
78	0.046028	642668	29580.72	6188.64	137142.9	112776.8	1242669
79	0.05092	613087.3	31218.4	6403.198	128265.2	106588.2	1105527
80	0.056312	581868.9	32766.2	6588.888	119347	100185	977261.4

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
81	0.062253	549102.7	34183.29	6739.067	110417.9	93596.09	857914.4
82	0.068791	514919.4	35421.82	6846.311	101513.8	86857.02	747496.4
83	0.075983	479497.6	36433.66	6903.803	92677.04	80010.71	645982.6
84	0.083883	443063.9	37165.53	6904.396	83956.04	73106.91	553305.6
85	0.092554	405898.4	37567.52	6842.231	75405.44	66202.51	469349.6
86	0.102059	368330.8	37591.48	6712.348	67084.67	59360.28	393944.1
87	0.112464	330739.4	37196.27	6511.549	59056.94	52647.93	326859.4
88	0.123836	293543.1	36351.2	6238.835	51387.41	46136.38	267802.5
89	0.136246	257191.9	35041.37	5896.11	44140.98	39897.55	216415.1
90	0.149763	222150.5	33269.93	5488.28	37379.36	34001.44	172274.1
91	0.164456	188880.6	31062.55	5023.672	31158.15	28513.16	134894.7
92	0.180392	157818	28469.11	4513.963	25523.54	23489.49	103736.6
93	0.197631	129348.9	25563.36	3973.761	20509.11	18975.52	78213.06
94	0.216228	103785.6	22441.35	3420.051	16133.21	15001.76	57703.95
95	0.236229	81344.23	19215.87	2871.068	12396.82	11581.71	41570.73
96	0.257666	62128.36	16008.37	2344.933	9282.681	8710.643	29173.91
97	0.280553	46120	12939.1	1858.178	6755.735	6365.711	19891.23
98	0.304887	33180.89	10116.42	1424.328	4765.091	4507.533	13135.49
99	0.330638	23064.47	7625.99	1052.638	3247.33	3083.205	8370.402
100	0.357746	15438.48	5523.054	747.4153	2131.019	2030.567	5123.072
101	0.386119	9915.425	3828.534	507.943	1341.819	1283.151	2992.052
102	0.415626	6086.891	2529.87	329.0641	807.566	775.2085	1650.233
103	0.446094	3557.021	1586.766	202.3461	462.6672	446.1443	842.6673
104	0.477308	1970.255	940.4186	117.5718	251.2492	243.7982	380.0001
105	1	1029.837	1029.837	126.2264	128.7509	126.2264	128.7509

非养老金业务男性表 CL3（2000—2003）（i=0.025）

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
0	0.000627	1000000	627	611.7073	1000000	149160.5	34884421
1	0.000525	999373	524.6708	499.3892	974998	148548.8	33884421
2	0.000434	998848.3	433.5002	402.548	950718.2	148049.4	32909423
3	0.000362	998414.8	361.4262	327.4343	927127.4	147646.8	31958704
4	0.000311	998053.4	310.3946	274.3436	904187.1	147319.4	31031577
5	0.000281	997743	280.3658	241.7585	881859.4	147045	30127390
6	0.000269	997462.6	268.3175	225.7261	860108.9	146803.3	29245530
7	0.000268	997194.3	267.2481	219.3429	838904.9	146577.6	28385422
8	0.00027	996927.1	269.1703	215.5323	818224.5	146358.2	27546517
9	0.000271	996657.9	270.0943	210.9972	798052.3	146142.7	26728292
10	0.000272	996387.8	271.0175	206.5546	778376.6	145931.7	25930240
11	0.000271	996116.8	269.9477	200.7212	759185.2	145725.1	25151863
12	0.000272	995846.8	270.8703	196.4949	740467.8	145524.4	24392678
13	0.000278	995576	276.7701	195.8777	722211.1	145327.9	23652210
14	0.000292	995299.2	290.6274	200.6682	704400.3	145132	22929999
15	0.000316	995008.6	314.4227	211.803	687019.2	144931.4	22225599
16	0.000351	994694.2	349.1376	229.4515	670050.8	144719.6	21538580
17	0.000396	994345	393.7606	252.4659	653478.6	144490.1	20868529
18	0.000446	993951.3	443.3023	277.2979	637287.7	144237.7	20215050
19	0.000497	993508	493.7735	301.3356	621466.8	143960.4	19577763
20	0.00054	993014.2	536.2277	319.2626	606007.7	143659	18956296
21	0.000575	992478	570.6748	331.4848	590907.8	143339.8	18350288
22	0.000601	991907.3	596.1363	337.8288	576163.9	143008.3	17759380
23	0.000623	991311.1	617.5868	341.4485	561773.3	142670.4	17183217
24	0.000643	990693.6	637.016	343.6004	547730.1	142329	16621443
25	0.00066	990056.5	653.4373	343.8614	534027.2	141985.4	16073713
26	0.000676	989403.1	668.8365	343.3805	520658.3	141641.5	15539686

续表

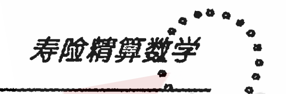
x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
27	0.000693	988734.3	685.1928	343.1979	507615.9	141298.2	15019028
28	0.000712	988049.1	703.4909	343.7688	494891.8	140955	14511412
29	0.000734	987345.6	724.7117	345.501	482477.5	140611.2	14016520
30	0.000759	986620.9	748.8452	348.299	470364.3	140265.7	13534042
31	0.000788	985872	776.8672	352.5194	458543.7	139917.4	13063678
32	0.00082	985095.2	807.778	357.6057	447007.2	139564.9	12605135
33	0.000855	984287.4	841.5657	363.4767	435747	139207.3	12158127
34	0.000893	983445.8	878.2171	370.0553	424755.5	138843.8	11722380
35	0.000936	982567.6	919.6833	378.076	414025.6	138473.7	11297625
36	0.000985	981647.9	966.9232	387.801	403549.3	138095.7	10883599
37	0.001043	980681	1022.85	400.2259	393318.8	137707.9	10480050
38	0.001111	979658.1	1088.4	415.4874	383325.5	137307.6	10086731
39	0.001189	978569.7	1163.519	433.3303	373560.6	136892.1	9703406
40	0.001275	977406.2	1246.193	452.8004	364016	136458.8	9329845
41	0.001366	976160	1333.435	472.6823	354684.8	136006	8965829
42	0.001461	974826.6	1424.222	492.5512	345561.2	135533.3	8611144
43	0.00156	973402.4	1518.508	512.3502	336640.4	135040.8	8265583
44	0.001665	971883.9	1618.187	532.6656	327917.3	134528.4	7928943
45	0.001783	970265.7	1729.984	555.5769	319386.6	133995.8	7601026
46	0.001918	968535.7	1857.651	582.0262	311041.1	133440.2	7281639
47	0.002055	966678	1986.523	607.2229	302872.7	132858.2	6970598
48	0.002238	964691.5	2158.98	643.8418	294878.4	132250.9	6667725
49	0.002446	962532.5	2354.355	684.9811	287042.4	131607.1	6372847
50	0.002666	960178.2	2559.835	726.5991	279356.4	130922.1	6085804
51	0.00288	957618.4	2757.941	763.7372	271816.2	130195.5	5806448
52	0.003085	954860.4	2945.744	795.8481	264422.8	129431.8	5534632
53	0.0033	951914.7	3141.318	827.9864	257177.6	128635.9	5270209

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
54	0.003545	948773.3	3363.402	864.9004	250077	127807.9	5013031
55	0.003838	945409.9	3628.483	910.3087	243112.7	126943	4762954
56	0.004207	941781.5	3962.075	969.7557	236272.8	126032.7	4519842
57	0.004676	937819.4	4385.243	1047.151	229540.3	125063	4283569
58	0.005275	933434.1	4923.865	1147.092	222894.6	124015.8	4054029
59	0.006039	928510.3	5607.274	1274.441	216311	122868.7	3831134
60	0.006989	922903	6450.169	1430.261	209760.7	121594.3	3614823
61	0.007867	916452.8	7209.734	1559.695	203214.3	120164	3405062
62	0.008725	909243.1	7933.146	1674.333	196698.2	118604.3	3201848
63	0.009677	901310	8721.976	1795.922	190226.3	116930	3005150
64	0.010731	892588	9578.362	1924.155	183790.7	115134.1	2814923
65	0.0119	883009.6	10507.81	2059.384	177383.9	113209.9	2631133
66	0.013229	872501.8	11542.33	2206.96	170998.1	111150.5	2453749
67	0.014705	860959.5	12660.41	2361.701	164620.4	108943.6	2282751
68	0.016344	848299.1	13864.6	2523.252	158243.6	106581.9	2118130
69	0.018164	834434.5	15156.67	2691.121	151860.7	104058.6	1959887
70	0.020184	819277.8	16536.3	2864.468	145465.7	101367.5	1808026
71	0.022425	802741.5	18001.48	3042.215	139053.3	98503.04	1662560
72	0.024911	784740	19548.66	3223.107	132619.5	95460.83	1523507
73	0.027668	765191.4	21171.31	3405.507	126161.8	92237.72	1390887
74	0.030647	744020	22801.98	3578.349	119679.2	88832.21	1264726
75	0.033939	721218.1	24477.42	3747.588	113181.8	85253.86	1145046
76	0.037577	696740.6	26181.42	3910.71	106673.7	81506.27	1031865
77	0.041594	670559.2	27891.24	4064.492	100161.2	77595.56	925191
78	0.046028	642668	29580.72	4205.556	93653.75	73531.07	825029.8
79	0.05092	613087.3	31218.4	4330.135	87163.95	69325.52	731376
80	0.056312	581868.9	32766.2	4433.972	80707.87	64995.38	644212.1

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
81	0.062253	549102.7	34183.29	4512.912	74305.41	60561.41	563504.2
82	0.068791	514919.4	35421.82	4562.365	67980.17	56048.5	489198.8
83	0.075983	479497.6	36433.66	4578.236	61759.76	51486.13	421218.6
84	0.083883	443063.9	37165.53	4556.294	55675.18	46907.9	359458.8
85	0.092554	405898.4	37567.52	4493.245	49760.96	42351.6	303783.7
86	0.102059	368330.8	37591.48	4386.449	44054.03	37858.36	254022.7
87	0.112464	330739.4	37196.27	4234.472	38593.09	33471.91	209968.7
88	0.123836	293543.1	36351.2	4037.335	33417.33	29237.44	171375.6
89	0.136246	257191.9	35041.37	3796.935	28564.94	25200.1	137958.2
90	0.149763	222150.5	33269.93	3517.063	24071.3	21403.17	109393.3
91	0.164456	188880.6	31062.55	3203.623	19967.13	17886.1	85322.01
92	0.180392	157818	28469.11	2864.537	16276.5	14682.48	65354.89
93	0.197631	129348.9	25563.36	2509.427	13014.98	11817.94	49078.39
94	0.216228	103785.6	22441.35	2149.224	10188.11	9308.515	36063.41
95	0.236229	81344.23	19215.87	1795.432	7790.396	7159.291	25875.3
96	0.257666	62128.36	16008.37	1459.258	5804.955	5363.859	18084.9
97	0.280553	46120	12939.1	1150.709	4204.112	3904.601	12279.95
98	0.304887	33180.89	10116.42	877.7368	2950.864	2753.893	8075.836
99	0.330638	23064.47	7625.99	645.52	2001.155	1876.156	5124.972
100	0.357746	15438.48	5523.054	456.1093	1306.827	1230.636	3123.817
101	0.386119	9915.425	3828.534	308.4596	818.8436	774.5267	1816.99
102	0.415626	6086.891	2529.87	198.8566	490.4122	466.0672	998.1463
103	0.446094	3557.021	1586.766	121.6833	279.5943	267.2105	507.7341
104	0.477308	1970.255	940.4186	70.3583	151.0917	145.5273	228.1399
105	1	1029.837	1029.837	75.16897	77.0482	75.16897	77.0482



非养老金业务男性表 CL3（2000—2003） （i＝0.03）

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
0	0.000627	1000000	627	608.7379	1000000	105089.2	30725273
1	0.000525	999373	524.6708	494.5526	970265	104480.4	29725273
2	0.000434	998848.3	433.5002	396.7141	941510.3	103985.9	28755007
3	0.000362	998414.8	361.4262	321.1225	913691	103589.1	27813497
4	0.000311	998053.4	310.3946	267.7491	886757.5	103268	26899806
5	0.000281	997743	280.3658	234.8019	860661.9	103000.3	26013049
6	0.000269	997462.6	268.3175	218.1666	835359.3	102765.5	25152387
7	0.000268	997194.3	267.2481	210.9681	810810.2	102547.3	24317027
8	0.00027	996927.1	269.1703	206.2966	786983.4	102336.3	23506217
9	0.000271	996657.9	270.0943	200.9755	763855.3	102130	22719234
10	0.000272	996387.8	271.0175	195.7888	741406.1	101929.1	21955378
11	0.000271	996116.8	269.9477	189.3359	719616	101733.3	21213972
12	0.000272	995846.8	270.8703	184.4495	698466.9	101543.9	20494356
13	0.000278	995576	276.7701	182.9777	677938.8	101359.5	19795889
14	0.000292	995299.2	290.6274	186.5426	658010	101176.5	19117951
15	0.000316	995008.6	314.4227	195.9378	638658.1	100990	18459941
16	0.000351	994694.2	349.1376	211.234	619860.5	100794	17821282
17	0.000396	994345	393.7606	231.2929	601595.1	100582.8	17201422
18	0.000446	993951.3	443.3023	252.8091	583841.6	100351.5	16599827
19	0.000497	993508	493.7735	273.3904	566583.7	100098.7	16015985
20	0.00054	993014.2	536.2277	288.2488	549807.9	99825.31	15449402
21	0.000575	992478	570.6748	297.8309	533505.8	99537.06	14899594
22	0.000601	991907.3	596.1363	302.0573	517669	99239.23	14366088
23	0.000623	991311.1	617.5868	303.8118	502289.2	98937.17	13848419
24	0.000643	990693.6	637.016	304.2424	487355.6	98633.36	13346130
25	0.00066	990056.5	653.4373	302.9954	472856.5	98329.12	12858774
26	0.000676	989403.1	668.8365	301.1029	458781	98026.12	12385918

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
27	0.000693	988734.3	685.1928	299.4819	445117.3	97725.02	11927137
28	0.000712	988049.1	703.4909	298.5238	431853.3	97425.54	11482019
29	0.000734	987345.6	724.7117	298.5716	418976.5	97127.01	11050166
30	0.000759	986620.9	748.8452	299.5285	406474.7	96828.44	10631189
31	0.000788	985872	776.8672	301.6863	394336.1	96528.91	10224715
32	0.00082	985095.2	807.778	304.5535	382548.9	96227.23	9830379
33	0.000855	984287.4	841.5657	308.0508	371102.2	95922.67	9447830
34	0.000893	983445.8	878.2171	312.1038	359985.3	95614.62	9076728
35	0.000936	982567.6	919.6833	317.3205	349188.2	95302.52	8716742
36	0.000985	981647.9	966.9232	323.9028	338700.4	94985.2	8367554
37	0.001043	980681	1022.85	332.6577	328511.4	94661.29	8028854
38	0.001111	979658.1	1088.4	343.6662	318610.4	94328.64	7700342
39	0.001189	978569.7	1163.519	356.6848	308986.9	93984.97	7381732
40	0.001275	977406.2	1246.193	370.9019	299630.6	93628.29	7072745
41	0.001366	976160	1333.435	385.3082	290532.6	93257.38	6773114
42	0.001461	974826.6	1424.222	399.5553	281685.1	92872.07	6482582
43	0.00156	973402.4	1518.508	413.5986	273081.2	92472.52	6200897
44	0.001665	971883.9	1618.187	427.911	264713.7	92058.92	5927815
45	0.001783	970265.7	1729.984	444.15	256575.7	91631.01	5663102
46	0.001918	968535.7	1857.651	463.0359	248658.5	91186.86	5406526
47	0.002055	966678	1986.523	480.7363	240953	90723.82	5157868
48	0.002238	964691.5	2158.98	507.2529	233454.2	90243.09	4916915
49	0.002446	962532.5	2354.355	537.045	226147.3	89735.83	4683460
50	0.002666	960178.2	2559.835	566.9092	219023.4	89198.79	4457313
51	0.00288	957618.4	2757.941	592.9926	212077.2	88631.88	4238290
52	0.003085	954860.4	2945.744	614.925	205307.2	88038.89	4026212
53	0.0033	951914.7	3141.318	636.6516	198712.5	87423.96	3820905



续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
54	0.003545	948773.3	3363.402	661.807	192288.1	86787.31	3622193
55	0.003838	945409.9	3628.483	693.1713	186025.6	86125.5	3429905
56	0.004207	941781.5	3962.075	734.8536	179914.2	85432.33	3243879
57	0.004676	937819.4	4385.243	789.6501	173939.2	84697.48	3063965
58	0.005275	933434.1	4923.865	860.8151	168083.3	83907.83	2890026
59	0.006039	928510.3	5607.274	951.7399	162326.9	83047.01	2721942
60	0.006989	922903	6450.169	1062.92	156647.2	82095.27	2559615
61	0.007867	916452.8	7209.734	1153.483	151021.7	81032.35	2402968
62	0.008725	909243.1	7933.146	1232.254	145469.5	79878.87	2251946
63	0.009677	901310	8721.976	1315.323	140000.3	78646.62	2106477
64	0.010731	892588	9578.362	1402.399	134607.3	77331.29	1966477
65	0.0119	883009.6	10507.81	1493.673	129284.3	75928.89	1831869
66	0.013229	872501.8	11542.33	1592.94	124025.1	74435.22	1702585
67	0.014705	860959.5	12660.41	1696.354	118819.8	72842.28	1578560
68	0.016344	848299.1	13864.6	1803.594	113662.6	71145.93	1459740
69	0.018164	834434.5	15156.67	1914.247	108548.5	69342.33	1346078
70	0.020184	819277.8	16536.3	2027.662	103472.6	67428.09	1237529
71	0.022425	802741.5	18001.48	2143.029	98431.2	65400.43	1134056
72	0.024911	784740	19548.66	2259.433	93421.24	63257.4	1035625
73	0.027668	765191.4	21171.31	2375.709	88440.8	60997.96	942204
74	0.030647	744020	22801.98	2484.167	83489.14	58622.25	853763.2
75	0.033939	721218.1	24477.42	2589.027	78573.25	56138.09	770274.1
76	0.037577	696740.6	26181.42	2688.605	73695.69	53549.06	691700.8
77	0.041594	670559.2	27891.24	2780.765	68860.61	50860.46	618005.1
78	0.046028	642668	29580.72	2863.308	64074.19	48079.69	549144.5
79	0.05092	613087.3	31218.4	2933.815	59344.65	45216.38	485070.3
80	0.056312	581868.9	32766.2	2989.585	54682.35	42282.57	425725.7

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
81	0.062253	549102.7	34183.29	3028.039	50100.07	39292.98	371043.3
82	0.068791	514919.4	35421.82	3046.36	45612.81	36264.95	320943.3
83	0.075983	479497.6	36433.66	3042.117	41237.92	33218.59	275330.5
84	0.083883	443063.9	37165.53	3012.841	36994.7	30176.47	234092.5
85	0.092554	405898.4	37567.52	2956.727	32904.34	27163.63	197097.8
86	0.102059	368330.8	37591.48	2872.439	28989.24	24206.9	164193.5
87	0.112464	330739.4	37196.27	2759.457	25272.45	21334.46	135204.3
88	0.123836	293543.1	36351.2	2618.218	21776.9	18575	109931.8
89	0.136246	257191.9	35041.37	2450.365	18524.41	15956.79	88154.91
90	0.149763	222150.5	33269.93	2258.731	15534.49	13506.42	69630.5
91	0.164456	188880.6	31062.55	2047.446	12823.3	11247.69	54096.01
92	0.180392	157818	28469.11	1821.848	10402.36	9200.245	41272.71
93	0.197631	129348.9	25563.36	1588.25	8277.534	7378.397	30870.34
94	0.216228	103785.6	22441.35	1353.669	6448.191	5790.148	22592.81
95	0.236229	81344.23	19215.87	1125.347	4906.71	4436.478	16144.62
96	0.257666	62128.36	16008.37	910.1987	3638.449	3311.132	11237.91
97	0.280553	46120	12939.1	714.2597	2622.276	2400.933	7599.46
98	0.304887	33180.89	10116.42	542.1778	1831.64	1686.673	4977.184
99	0.330638	23064.47	7625.99	396.8019	1236.113	1144.495	3145.544
100	0.357746	15438.48	5523.054	279.0099	803.3079	747.6934	1909.431
101	0.386119	9915.425	3828.534	187.7741	500.9007	468.6835	1106.123
102	0.415626	6086.891	2529.87	120.4659	298.5373	280.9095	605.2225
103	0.446094	3557.021	1586.766	73.35698	169.3762	160.4436	306.6852
104	0.477308	1970.255	940.4186	42.20973	91.08589	87.0866	137.3091
105	1	1029.837	1029.837	44.87687	46.22317	44.87687	46.22317

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
54	0.002093	973169	2036.843	685.4062	334025	182844.1	7710228
55	0.002318	971132.1	2251.084	742.6465	326790.1	182158.7	7376203
56	0.002607	968881	2525.873	816.9617	319639.8	181416	7049413
57	0.002979	966355.2	2878.772	912.8456	312555.4	180599.1	6729773
58	0.00341	963476.4	3285.455	1021.375	305514	179686.2	6417218
59	0.003816	960190.9	3664.089	1116.749	298502.2	178664.8	6111704
60	0.004272	956526.9	4086.283	1221.006	291532.4	177548.1	5813201
61	0.004781	952440.6	4553.618	1333.97	284595.1	176327.1	5521669
62	0.005351	947887	5072.143	1456.735	277680.8	174993.1	5237074
63	0.005988	942814.8	5645.575	1589.634	270779.4	173536.4	4959393
64	0.006701	937169.2	6279.971	1733.59	263880.3	171946.7	4688614
65	0.007499	930889.3	6980.739	1889.253	256972.6	170213.1	4424733
66	0.008408	923908.5	7768.223	2061.153	250044.7	168323.9	4167761
67	0.009438	916140.3	8646.532	2249.211	243080.7	166262.7	3917716
68	0.010592	907493.8	9612.174	2451.375	236065.2	164013.5	3674635
69	0.011886	897881.6	10672.22	2668.35	228985.1	161562.2	3438570
70	0.013337	887209.4	11832.71	2900.495	221826.8	158893.8	3209585
71	0.014964	875376.7	13099.14	3147.968	214576.8	155993.3	2987758
72	0.016787	862277.5	14475.05	3410.418	207221.4	152845.3	2773181
73	0.018829	847802.5	15963.27	3687.306	199747.9	149434.9	2565960
74	0.021117	831839.2	17565.95	3977.945	192143.9	145747.6	2366212
75	0.023702	814273.3	19299.9	4284.914	184398.5	141769.7	2174068
76	0.026491	794973.4	21059.64	4583.927	176497.9	137484.8	1989670
77	0.029602	773913.7	22909.39	4888.777	168453.2	132900.8	1813172
78	0.03307	751004.3	24835.71	5195.927	160261.4	128012.1	1644719
79	0.036935	726168.6	26821.04	5501.256	151923.1	122816.1	1484457
80	0.041241	699347.6	28841.79	5799.738	143443	117314.9	1332534

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
81	0.046033	670505.8	30865.39	6084.96	134830.6	111515.1	1189091
82	0.051365	639640.4	32855.13	6350.222	126101.9	105430.2	1054260
83	0.057291	606785.3	34763.33	6587.293	117279.1	99079.95	928158.4
84	0.063872	572021.9	36536.18	6787.48	108392.3	92492.66	810879.2
85	0.071174	535485.7	38112.66	6941.519	99479.43	85705.18	702487
86	0.079267	497373.1	39425.27	7039.791	90587.34	78763.66	603007.6
87	0.088225	457947.8	40402.44	7072.819	81771.33	71723.87	512420.2
88	0.098129	417545.4	40973.31	7032.111	73095.15	64651.05	430648.9
89	0.109061	376572	41069.32	6910.383	64629.8	57618.94	357553.7
90	0.121107	335502.7	40631.73	6702.698	56452.16	50708.56	292923.9
91	0.134355	294871	39617.39	6407.227	48642.56	44005.86	236471.8
92	0.148896	255253.6	38006.24	6026.136	41281.56	37598.63	187829.2
93	0.164816	217247.4	35805.84	5565.93	34445.98	31572.5	146547.7
94	0.182201	181441.5	33058.83	5038.15	28204.64	26006.57	112101.7
95	0.201129	148382.7	29844.06	4459.041	22613.46	20968.42	83897.04
96	0.221667	118538.6	26276.1	3848.968	17711.01	16509.37	61283.59
97	0.24387	92262.53	22500.06	3231.223	13514.77	12660.41	43572.57
98	0.267773	69762.47	18680.5	2630.096	10018.55	9429.184	30057.8
99	0.293385	51081.96	14986.68	2068.656	7192.015	6799.088	20039.25
100	0.320685	36095.28	11575.21	1566.433	4982.339	4730.432	12847.23
101	0.349615	24520.07	8572.583	1137.35	3318.213	3163.999	7864.896
102	0.380069	15947.48	6061.144	788.3824	2115.8	2026.649	4546.683
103	0.411894	9886.339	4072.124	519.2818	1285.931	1238.267	2430.883
104	0.444879	5814.215	2586.622	323.3814	741.4353	718.9852	1144.951
105	1	3227.593	3227.593	395.6039	403.516	395.6039	403.516

养老金业务女性表 CL4（2000—2003） （i = 0.025）

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
0	0.000575	1000000	575	560.9756	1000000	133341.1	35533016
1	0.000466	999425	465.7321	443.2905	975048.8	132780.1	34533016
2	0.000369	998959.3	368.616	342.2966	950823.8	132336.8	33557967
3	0.00029	998590.7	289.5913	262.3554	927290.7	131994.5	32607144
4	0.000232	998301.1	231.6058	204.7058	904411.5	131732.1	31679853
5	0.000195	998069.5	194.6235	167.8233	882148	131527.4	30775441
6	0.000175	997874.8	174.6281	146.9085	860464.3	131359.6	29893294
7	0.000164	997700.2	163.6228	134.2929	839330.5	131212.7	29032829
8	0.000158	997536.6	157.6108	126.2034	818724.7	131078.4	28193499
9	0.000152	997379	151.6016	118.4309	798629.6	130952.2	27374774
10	0.000147	997227.4	146.5924	111.7247	779032.4	130833.8	26576144
11	0.000143	997080.8	142.5826	106.0181	759919.9	130722.1	25797112
12	0.000143	996938.2	142.5622	103.4175	741279.3	130616	25037192
13	0.000147	996795.6	146.529	103.7025	723095.9	130512.6	24295913
14	0.000156	996649.1	155.4773	107.3517	705355.7	130408.9	23572817
15	0.000167	996493.6	166.4144	112.1009	688044.5	130301.6	22867461
16	0.000181	996327.2	180.3352	118.5154	671150.9	130189.5	22179417
17	0.000196	996146.9	195.2448	125.1843	654662.8	130071	21508266
18	0.000213	995951.6	212.1377	132.698	638570.2	129945.8	20853603
19	0.00023	995739.5	229.0201	139.7643	622862.7	129813.1	20215033
20	0.000246	995510.5	244.8956	145.8075	607531.1	129673.3	19592170
21	0.000261	995265.6	259.7643	150.8879	592567.5	129527.5	18984639
22	0.000274	995005.8	272.6316	154.4996	577963.7	129376.6	18392072
23	0.000285	994733.2	283.499	156.7396	563712.5	129222.1	17814108
24	0.000293	994449.7	291.3738	157.1643	549806.7	129065.4	17250395
25	0.000301	994158.3	299.2417	157.4713	536239.6	128908.2	16700589
26	0.000308	993859.1	306.1086	157.1561	523003.1	128750.7	16164349

续表

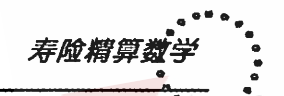
x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
27	0.000316	993553	313.9627	157.257	510089.8	128593.6	15641346
28	0.000325	993239	322.8027	157.7412	497491.3	128436.3	15131256
29	0.000337	992916.2	334.6128	159.5242	485199.7	128278.6	14633765
30	0.000351	992581.6	348.3961	162.0442	473206	128119.1	14148565
31	0.000366	992233.2	363.1573	164.7901	461502.4	127957	13675359
32	0.000384	991870	380.8781	168.6159	450081.4	127792.2	13213857
33	0.000402	991489.1	398.5786	172.1482	438935.2	127623.6	12763775
34	0.000421	991090.6	417.2491	175.8167	428057.3	127451.5	12324840
35	0.000441	990673.3	436.8869	179.6015	417441.1	127275.6	11896783
36	0.000464	990236.4	459.4697	184.2782	407080	127096	11479342
37	0.000493	989777	487.96	190.9314	396966.9	126911.8	11072262
38	0.000528	989289	522.3446	199.4006	387093.9	126720.8	10675295
39	0.000569	988766.7	562.6082	209.5325	377453.2	126521.4	10288201
40	0.000615	988204.1	607.7455	220.8225	368037.5	126311.9	9910748
41	0.000664	987596.3	655.7639	232.4584	358840.1	126091.1	9542710
42	0.000714	986940.5	704.6755	243.7042	349855.4	125858.6	9183870
43	0.000763	986235.9	752.498	253.8956	341078.7	125614.9	8834015
44	0.000815	985483.4	803.1689	264.3827	332505.8	125361	8492936
45	0.000873	984680.2	859.6258	276.0652	324131.5	125096.6	8160430
46	0.000942	983820.6	926.759	290.3656	315949.8	124820.6	7836299
47	0.001014	982893.8	996.6543	304.6485	307953.3	124530.2	7520349
48	0.001123	981897.2	1102.671	328.8337	300137.6	124225.6	7212395
49	0.001251	980794.5	1226.974	356.9785	292488.4	123896.7	6912258
50	0.001393	979567.5	1364.538	387.3186	284997.5	123539.7	6619769
51	0.001548	978203	1514.258	419.3329	277659.1	123152.4	6334772
52	0.001714	976688.7	1674.044	452.2745	270467.6	122733.1	6057113
53	0.001893	975014.7	1845.703	486.489	263418.5	122280.8	5786645

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
54	0.002093	973169	2036.843	523.7751	256507.2	121794.3	5523227
55	0.002318	971132.1	2251.084	564.7488	249727.1	121270.6	5266720
56	0.002607	968881	2525.873	618.2315	243071.5	120705.8	5016992
57	0.002979	966355.2	2878.772	687.4215	236524.7	120087.6	4773921
58	0.00341	963476.4	3285.455	765.3981	230068.4	119400.2	4537396
59	0.003816	960190.9	3664.089	832.7872	223691.5	118634.8	4307328
60	0.004272	956526.9	4086.283	906.0927	217402.9	117802	4083636
61	0.004781	952440.6	4553.618	985.0924	211194.3	116895.9	3866234
62	0.005351	947887	5072.143	1070.503	205058.1	115910.8	3655039
63	0.005988	942814.8	5645.575	1162.467	198986.2	114840.3	3449981
64	0.006701	937169.2	6279.971	1261.556	192970.4	113677.8	3250995
65	0.007499	930889.3	6980.739	1368.127	187002.2	112416.3	3058025
66	0.008408	923908.5	7768.223	1485.329	181073.1	111048.1	2871023
67	0.009438	916140.3	8646.532	1612.943	175171.3	109562.8	2689949
68	0.010592	907493.8	9612.174	1749.343	169285.9	107949.9	2514778
69	0.011886	897881.6	10672.22	1894.891	163407.6	106200.5	2345492
70	0.013337	887209.4	11832.71	2049.698	157527.2	104305.6	2182085
71	0.014964	875376.7	13099.14	2213.729	151635.4	102255.9	2024557
72	0.016787	862277.5	14475.05	2386.591	145723.2	100042.2	1872922
73	0.018829	847802.5	15963.27	2567.769	139782.4	97655.61	1727199
74	0.021117	831839.2	17565.95	2756.65	133805.3	95087.84	1587416
75	0.023702	814273.3	19299.9	2954.891	127785.1	92331.19	1453611
76	0.026491	794973.4	21059.64	3145.671	121713.5	89376.3	1325826
77	0.029602	773913.7	22909.39	3338.505	115599.2	86230.62	1204112
78	0.03307	751004.3	24835.71	3530.948	109441.2	82892.12	1088513
79	0.036935	726168.6	26821.04	3720.2	103241	79361.17	979072
80	0.041241	699347.6	28841.79	3902.916	97002.7	75640.97	875831

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
81	0.046033	670505.8	30865.39	4074.88	90733.87	71738.06	778828.3
82	0.051365	639640.4	32855.13	4231.773	84445.97	67663.18	688094.4
83	0.057291	606785.3	34763.33	4368.343	78154.54	63431.4	603648.5
84	0.063872	572021.9	36536.18	4479.14	71879.99	59063.06	525493.9
85	0.071174	535485.7	38112.66	4558.446	65647.67	54583.92	453614
86	0.079267	497373.1	39425.27	4600.43	59488.07	50025.47	387966.3
87	0.088225	457947.8	40402.44	4599.467	53436.71	45425.04	328478.2
88	0.098129	417545.4	40973.31	4550.688	47533.91	40825.58	275041.5
89	0.109061	376572	41069.32	4450.099	41823.86	36274.89	227507.6
90	0.121107	335502.7	40631.73	4295.3	36353.66	31824.79	185683.7
91	0.134355	294871	39617.39	4085.924	31171.69	27529.49	149330.1
92	0.148896	255253.6	38006.24	3824.155	26325.48	23443.57	118158.4
93	0.164816	217247.4	35805.84	3514.88	21859.24	19619.41	91832.92
94	0.182201	181441.5	33058.83	3166.068	17811.21	16104.53	69973.68
95	0.201129	148382.7	29844.06	2788.476	14210.72	12938.46	52162.47
96	0.221667	118538.6	26276.1	2395.223	11075.64	10149.99	37951.75
97	0.24387	92262.53	22500.06	2000.99	8410.279	7754.764	26876.11
98	0.267773	69762.47	18680.5	1620.787	6204.16	5753.774	18465.83
99	0.293385	51081.96	14986.68	1268.583	4432.052	4132.987	12261.67
100	0.320685	36095.28	11575.21	955.9136	3055.37	2864.404	7829.619
101	0.349615	24520.07	8572.583	690.6808	2024.936	1908.491	4774.249
102	0.380069	15947.48	6061.144	476.4271	1284.866	1217.81	2749.313
103	0.411894	9886.339	4072.124	312.2763	777.1008	741.3826	1464.447
104	0.444879	5814.215	2586.622	193.5206	445.8709	429.1063	687.3463
105	1	3227.593	3227.593	235.5858	241.4754	235.5858	241.4754



养老金业务女性表 CL4（2000—2003）　　(i = 0.03)

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
0	0.000575	1000000	575	558.2524	1000000	91503.9	31191700
1	0.000466	999425	465.7321	438.9971	970315.5	90945.65	30191700
2	0.000369	998959.3	368.616	337.3358	941614.9	90506.65	29221384
3	0.00029	998590.7	289.5913	257.2981	913851.9	90169.31	28279769
4	0.000232	998301.1	231.6058	199.7852	886977.6	89912.01	27365917
5	0.000195	998069.5	194.6235	162.9942	860943.5	89712.23	26478940
6	0.000175	997874.8	174.6281	141.9886	835704.5	89549.24	25617996
7	0.000164	997700.2	163.6228	129.1654	811221.6	89407.25	24782292
8	0.000158	997536.6	157.6108	120.7955	787464.6	89278.08	23971070
9	0.000152	997379	151.6016	112.8058	764407.9	89157.29	23183605
10	0.000147	997227.4	146.5924	105.9015	742030.8	89044.48	22419198
11	0.000143	997080.8	142.5826	100.0045	720312.4	88938.58	21677167
12	0.000143	996938.2	142.5622	97.07789	699232.4	88838.57	20956854
13	0.000147	996795.6	146.529	96.8729	678769.3	88741.5	20257622
14	0.000156	996649.1	155.4773	99.79494	658902.5	88644.62	19578853
15	0.000167	996493.6	166.4144	103.704	639611.3	88544.83	18919950
16	0.000181	996327.2	180.3352	109.1058	620878.2	88441.12	18280339
17	0.000196	996146.9	195.2448	114.6857	602685.2	88332.02	17659461
18	0.000213	995951.6	212.1377	120.9792	585016.6	88217.33	17056775
19	0.00023	995739.5	229.0201	126.8029	567856.3	88096.35	16471759
20	0.000246	995510.5	244.8956	131.6434	551190	87969.55	15903902
21	0.000261	995265.6	259.7643	135.569	535004.3	87837.91	15352712
22	0.000274	995005.8	272.6316	138.1402	519286.1	87702.34	14817708
23	0.000285	994733.2	283.499	139.4627	504023.1	87564.2	14298422
24	0.000293	994449.7	291.3738	139.1617	489203.3	87424.74	13794399
25	0.000301	994158.3	299.2417	138.7568	474815.5	87285.57	13305196
26	0.000308	993859.1	306.1086	137.8067	460847.2	87146.82	12830380

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
27	0.000316	993553	313.9627	137.2258	447286.7	87009.01	12369533
28	0.000325	993239	322.8027	136.9801	434121.7	86871.78	11922246
29	0.000337	992916.2	334.6128	137.856	421340.4	86734.8	11488125
30	0.000351	992581.6	348.3961	139.354	408930.5	86596.95	11066784
31	0.000366	992233.2	363.1573	141.0274	396880.5	86457.59	10657854
32	0.000384	991870	380.8781	143.601	385179.9	86316.57	10260973
33	0.000402	991489.1	398.5786	145.8977	373817.4	86172.97	9875793
34	0.000421	991090.6	417.2491	148.2834	362783.6	86027.07	9501976
35	0.000441	990673.3	436.8869	150.7402	352068.9	85878.78	9139192
36	0.000464	990236.4	459.4697	153.9145	341663.7	85728.04	8787123
37	0.000493	989777	487.96	158.6974	331558.4	85574.13	8445460
38	0.000528	989289	522.3446	164.9322	321742.7	85415.43	8113901
39	0.000569	988766.7	562.6082	172.4714	312206.6	85250.5	7792159
40	0.000615	988204.1	607.7455	180.8821	302940.7	85078.03	7479952
41	0.000664	987596.3	655.7639	189.489	293936.3	84897.15	7177011
42	0.000714	986940.5	704.6755	197.6917	285185.6	84707.66	6883075
43	0.000763	986235.9	752.498	204.9592	276681.5	84509.97	6597890
44	0.000815	985483.4	803.1689	212.3889	268417.9	84305.01	6321208
45	0.000873	984680.2	859.6258	220.6973	260387.5	84092.62	6052790
46	0.000942	983820.6	926.759	231.0028	252582.7	83871.92	5792403
47	0.001014	982893.8	996.6543	241.1892	244994.9	83640.92	5539820
48	0.001123	981897.2	1102.671	259.0728	237617.9	83399.73	5294825
49	0.001251	980794.5	1226.974	279.8814	230438	83140.66	5057207
50	0.001393	979567.5	1364.538	302.1948	223446.3	82860.77	4826769
51	0.001548	978203	1514.258	325.5849	216635.9	82558.58	4603323
52	0.001714	976688.7	1674.044	349.4573	210000.6	82232.99	4386687
53	0.001893	975014.7	1845.703	374.0689	203534.6	81883.54	4176686

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
54	0.002093	973169	2036.843	400.7838	197232.3	81509.47	3973152
55	0.002318	971132.1	2251.084	430.0383	191086.9	81108.68	3775919
56	0.002607	968881	2525.873	468.4785	185091.2	80678.65	3584833
57	0.002979	966355.2	2878.772	518.38	179231.8	80210.17	3399741
58	0.00341	963476.4	3285.455	574.3799	173493	79691.79	3220510
59	0.003816	960190.9	3664.089	621.9171	167865.5	79117.41	3047017
60	0.004272	956526.9	4086.283	673.3761	162354.3	78495.49	2879151
61	0.004781	952440.6	4553.618	728.5321	156952.1	77822.11	2716797
62	0.005351	947887	5072.143	787.8551	151652.2	77093.58	2559845
63	0.005988	942814.8	5645.575	851.3846	146447.3	76305.73	2408193
64	0.006701	937169.2	6279.971	919.471	141330.4	75454.34	2261745
65	0.007499	930889.3	6980.739	992.3036	136294.5	74534.87	2120415
66	0.008408	923908.5	7768.223	1072.081	131332.5	73542.57	1984120
67	0.009438	916140.3	8646.532	1158.539	126435.2	72470.49	1852788
68	0.010592	907493.8	9612.174	1250.412	121594.1	71311.95	1726353
69	0.011886	897881.6	10672.22	1347.873	116802.1	70061.54	1604759
70	0.013337	887209.4	11832.71	1450.913	112052.2	68713.66	1487957
71	0.014964	875376.7	13099.14	1559.418	107337.6	67262.75	1375904
72	0.016787	862277.5	14475.05	1673.026	102651.9	65703.33	1268567
73	0.018829	847802.5	15963.27	1791.296	97988.99	64030.31	1165915
74	0.021117	831839.2	17565.95	1913.726	93343.65	62239.01	1067926
75	0.023702	814273.3	19299.9	2041.39	88711.17	60325.28	974582.2
76	0.026491	794973.4	21059.64	2162.642	84085.96	58283.89	885871
77	0.029602	773913.7	22909.39	2284.073	79474.21	56121.25	801785
78	0.03307	751004.3	24835.71	2404.008	74875.36	53837.18	722310.8
79	0.036935	726168.6	26821.04	2520.563	70290.51	51433.17	647435.5
80	0.041241	699347.6	28841.79	2631.522	65722.65	48912.61	577144.9

续表

x	q_x	l_x	d_x	C_x	D_x	M_x	N_x
81	0.046033	670505.8	30865.39	2734.131	61176.88	46281.09	511422.3
82	0.051365	639640.4	32855.13	2825.618	56660.9	43546.95	450245.4
83	0.057291	606785.3	34763.33	2902.649	52184.96	40721.34	393584.5
84	0.063872	572021.9	36536.18	2961.823	47762.36	37818.69	341399.5
85	0.071174	535485.7	38112.66	2999.632	43409.4	34856.86	293637.2
86	0.079267	497373.1	39425.27	3012.563	39145.42	31857.23	250227.8
87	0.088225	457947.8	40402.44	2997.311	34992.7	28844.67	211082.4
88	0.098129	417545.4	40973.31	2951.128	30976.18	25847.36	176089.7
89	0.109061	376572	41069.32	2871.887	27122.84	22896.23	145113.5
90	0.121107	335502.7	40631.73	2758.531	23460.96	20024.34	117990.6
91	0.134355	294871	39617.39	2611.327	20019.1	17265.81	94529.68
92	0.148896	255253.6	38006.24	2432.165	16824.7	14654.48	74510.58
93	0.164816	217247.4	35805.84	2224.614	13902.49	12222.32	57685.88
94	0.182201	181441.5	33058.83	1994.119	11272.95	9997.705	43783.39
95	0.201129	148382.7	29844.06	1747.77	8950.492	8003.586	32510.44
96	0.221667	118538.6	26276.1	1493.998	6942.028	6255.815	23559.95
97	0.24387	92262.53	22500.06	1242.04	5245.834	4761.817	16617.92
98	0.267773	69762.47	18680.5	1001.16	3851.003	3519.777	11372.09
99	0.293385	51081.96	14986.68	779.7996	2737.678	2518.617	7521.088
100	0.320685	36095.28	11575.21	584.7488	1878.14	1738.817	4783.41
101	0.349615	24520.07	8572.583	420.4504	1238.688	1154.068	2905.271
102	0.380069	15947.48	6061.144	288.616	782.1593	733.6181	1666.583
103	0.411894	9886.339	4072.124	188.2563	470.7619	445.002	884.4233
104	0.444879	5814.215	2586.622	116.0979	268.7941	256.7457	413.6613
105	1	3227.593	3227.593	140.6478	144.8672	140.6478	144.8672

习题答案

习题一答案：

1. (1) 0.2

   (2) $\frac{2}{3}$

2. (1) 0.4878

   (2) 0.1652

3. (1) $F(x)=\frac{x}{100}$；$f(x)=\frac{1}{100}$

   (2) 3/10

   (3) 1/3

   (4) 1/4，5/8，1/4

4. $f(t)=\frac{40+t}{2400}$　$0\leqslant t\leqslant 80-40$

5. $T(20)=47.83$，$K(20)=47$

6. ${}_2p_{x+5}=\frac{3}{5}$

7. (1) $1-\frac{1}{25}x^{2/3}$，125

   (2) 1

   (3) $\frac{1}{25}\left[(x+n)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right]$

8. $1-\exp(-x)$；e^{-x}；1

9. $\frac{1}{1+x}$；$\frac{1}{(1+x)^2}$；$\frac{1}{1+x}$

10. $\cos x$；$1-\cos x$；$\sin x$

11. $q_{50}-\mu_{50}=\frac{1}{6000}$

13. (1) $\left(\frac{100-x-t}{100-x}\right)^2$；$1-\left(\frac{100-x-t}{100-x}\right)^2$；$\left(\frac{100-x}{10000}\right)^2$

    (2) $\frac{1}{3}(100-x)$

15.（1）$\frac{1}{100-x}$；$\frac{1}{100-x}$

（2）$\frac{1}{100-x}$

17. $q_{26}=\frac{1}{66}$

18. 0.2105

19. 0.001；0.00199

20. 0.607；0.054

21. $t\cdot q_x$； q_x； $1-t\cdot q_x$； $\frac{q_x}{1-t\cdot q_x}$； $\frac{s\cdot q_x}{1-t\cdot q_x}$

22. $1-e^{-\mu t}$； $\mu e^{-\mu t}$； $e^{-\mu t}$； μ； $1-e^{-\mu s}$

23. $\frac{t\cdot q_x}{1-(1-t)\cdot q_x}$； $\frac{p_x\cdot q_x}{[1-(1-t)\cdot q_x]^2}$； $1-\frac{t\cdot q_x}{1-(1-t)\cdot q_x}$；

$\frac{q_x}{1-(1-t)\cdot q_x}$； $\frac{s\cdot q_x}{1-(1-t-s)\cdot q_x}$

24. 0.00841；0.00843；0.00844

25.（1）${}_{1/3}q_{x+1/2}=\frac{4}{94}$

（2）${}_{1/3}q_x=0.0435$

（3）${}_{1/2}q_x=0.0619$

29. $kt^n\exp(-bt^{n+1})$； $\exp(-bx^{n+1})$

30. $\mathring{e}_0=33.33$

31. $\frac{a}{w-x}$； $\frac{w-x}{a+1}$

32. $t\cdot e^{-t^2}$； $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

33.（1）0.0019

（2）0.0008

（3）0.0014

（4）0.9979

34. 0.14045；0

35. $l_{[94]}=4800$

36. ${}_{0.9}q_{[60]+0.6}=0.0103$

37. $l_{[97]}=4047.170$

39. $Var(T)=\frac{(100-x)^2}{18}$

40. $\frac{100-x}{2}$； $\frac{(100-x)^2}{12}$

习题二答案：

1.（1）5.2545；（2）5.95828

2. (1) 0.05; (2) 0.5

3. (1) $1.05^{-25}\cdot\frac{75-x}{100-x}$; (2) $\frac{14.1}{100-x}$

7. 143.66

8. 71403.94

9. 2284

10. 72305.37

11. 690.97

12. 397.02

14. $1000\ [C_0+2C_1+4C_2+6C_3+8C_4+10\ (M_5-M_{21})\ +50M_{21}]\ /D_0$

习题三答案:

1. 793 元

2. 727.76 元

4. 15.38

6. (1) 18163.47 元 (2) 18458.69 元 (3) 18607.5 元 (4) 18707.28 元

7. 25692.23 元

8. 36746.29 元

9. $150\bar{a}_{35:\overline{3}|}+50\ \overline{Ia}_{35:\overline{3}|}$

10. 937

11. $500\cdot\frac{M_{x+9}+R_x-R_{x+9}-9M_{x+9}}{D_x}+1000\cdot V^9\cdot{}_9p_x\cdot\frac{M_{x+9}+3M_{x+9}-R_{x+10}+R_{x+13}}{D_{x+9}}$

12. $\frac{50000\cdot A_{50}}{a_{50}^{(12)}}$

习题四答案:

1. (1) 17.77; (2) 21.01; (3) 19.65

2. (1) 5.576; (2) 41.236; (3) 14.898; (4) 18.843

3. 0.011; 0.031

6. 40559.34

7. 105597

8. 197.56

9. 196.59

10. 14.357

11. 26.957

12. 9.6091

13. 28.735

14. (1) 0.01337; (2) 0.21

19. (1) 73.67; (2) 35.8352; (3) 0.5137; (4) 10.31

21. (1) 0.007564; (2) 0.003; (3) 0.01937

22. $\frac{-\mu(\mu+\delta)}{\mu+2\delta}$

23. (1) 18.3; (2) 21.63; (3) 7.38; (4) 46.97; (5) 61.15

24. (1) 174.715; (2) 12.31; (3) 12.595; (4) 12.656

25. (1) 513.6; (2) 513.753

26. (1) 852.575; (2) 852.83

28. $P=\frac{M_{25}+M_{35}}{N_{25}+N_{35}-2N_{65}}$

29. $P=\frac{1000M_{20}+2000M_{30}-1000M_{50}-2000M_{70}+1000D_{70}}{N_{20}-N_{30}}$

30. $P=\frac{100\ (M_1+M_1+\cdots+M_{10})\ -1000M_{20}+1000D_{20}}{N_1-N_{20}}$

习题五答案:

1. $1000P_{100}=439.14$

年　度	1	2	3	4	5	6
年初预期余额	3735708.2	2514805.0	1554938.3	882789.2	459242.3	218789.8
年末预期积累	3829100.9	2577675.1	1593811.8	904858.88	470723.38	224259.54
预期死亡给付	3509043	2235699	1336899	744537	382766	179812
年末预期余额	320057.91	341976.10	256912.77	160321.88	87957.38	44447.54
每张保单价值	64.03938	123.80879	180.26031	235.52671	295.22963	376.30060

2. (1) 25.308; (2) 25.716; (3) 24.571; (4) 25.993; (5) 26.570

4. 0.272

6. 5.28

7. 1/5

10. 0.028

12. 0.979

13. (1) 283.111; (2) 416.767; (3) 40.122; (4) 383.071; (5) 699.321

14. 期初 5979.2，期中 6039.85，期末 6100.5

15.0.025

17. (a) 247.78 (b) 248.49 (c) 108.37 (d) 369.13

19. 22.2

20. 0.20

22. (1) $E\ [{}_tL]\ =\frac{1-\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\delta}$; (2) $Var\ [{}_tL]\ =\frac{{}^2\bar{A}_{x+t}-\bar{A}^2_{x+t}}{\delta^2}$

23. $\bar{A}^1_{50:\overline{3}|}$

24. 459.69

26. (a) 0.8160 (b) 7.6569 (c) 825.94 (d) −5.83

27. (a) 740 (b) 63 (c) 1500 (d) 6300600

30. (1) 6420.25; (2) $\frac{i}{\delta}{}_{10}V\ (A^{1}_{50:\overline{20}|}) + {}_{10}V\ (A_{50:\overset{1}{\overline{20}|}})$

习题六答案：

1. $\dfrac{1000\bar{A}_{[40]:\overline{25}|}+8.50+4\ddot{a}_{[40]:\overline{25}|}}{0.93\ddot{a}_{[40]:\overline{25}|}+0.05\ {}_{10}E_{[40]}\ddot{a}_{[40]+10:\overline{15}|}-0.35}$

2. $\dfrac{1000\bar{A}_{x:\overline{n}|}+2.50+2.50\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{0.935}$

3. 137.5

4. 6.40

5. (1) 903.99; (2) 887.15; (3) 888.23

6. $R\ (b) = \begin{cases} 30.47 & (10\leqslant b<20) \\ 29.91 & (20\leqslant b<30) \\ 29.55 & (b\geqslant 50) \end{cases}$

7. 10

8. $a=\ (1+e_0+e_2+e_3)$; $c=\ (e_1+e_0d)$

10. 5332.50

11. 19767.78

13. $\bar{\beta}=\dfrac{\bar{A}_x}{(\bar{I}\bar{a}_{x:\overline{m}|}/m+{}_{m|}\bar{a}_x)}$

$${}_tV\ (\bar{A}_x)^{Mod}=\bar{A}_{x+t}-\bar{\beta}\left[\frac{\bar{I}\bar{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}{m}+\frac{t}{m}\bar{a}_{x+t:\overline{m-t}|}+{}_{m-t|}\bar{a}_{x+t}\right]$$

14. $\alpha_x^{Mod}=A^{1}_{x:\overline{1}|}+K_1E_x$

$$\beta_x^{Mod}=P_{x+1}-\frac{K}{\ddot{a}_{x+1}}$$

17. 192.10

18. $\alpha=\beta^{Com}_{x:\overline{20}|}-\ ({}_{19}P_{x+1}-A^{1}_{x:\overline{1}|})$

$$\beta=\frac{(P_{x:\overline{20}|}\ddot{a}_{x:\overline{15}|}-\alpha)}{a_{x:\overline{14}|}}$$

20. 284.6

21. (1) $\beta=0.03$; $\alpha=0.01$; $\beta-\alpha<0.05$

(2) 0.28

(4) 0.0867, 0.0367

(5) 0.0278

22. $\beta^{Com}_{x:\overline{15}|}=P_{x:\overline{15}|}+\dfrac{{}_{19}P_{x+1}-A^{1}_{x:\overline{1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{15}|}}$

$$\alpha^{Com}_{x:\overline{15}|}=\beta^{Com}_{x:\overline{15}|}-\ ({}_{19}P_{x+1}-A^{1}_{x:\overline{1}|})$$

23. 973.68

24. 1900

25. $T = \beta^{Com} - {}_{19}P_{x+1}$

习题七答案：

1. (1) ${}_np_x {}_np_y$
   (2) ${}_np_x + {}_np_y - 2\ {}_np_x {}_np_y$
   (3) ${}_np_x + {}_np_y - {}_np_x {}_np_y$
   (4) $1 - {}_np_x {}_np_y$
   (5) $1 - {}_np_x - {}_np_y + {}_np_x {}_np_y$

3. 2/9

4. (1) 2/3；(2) 18.06；(3) 160.11

5. $\mu_{xx} \mathring{e}_{xx} - 1$

6. 531/2000

7. (1) 29/30；(2) 36.94；(3) 182.33；(4) 82.95

8. ${}_{n|}q_x + {}_{n|}q_y - {}_{n|}q_x {}_{n|}q_y$，不等于${}_{n|}q_{\overline{xy}}$。后者表示第二个死亡者在第 $n+1$ 年死亡的概率

9. 1/2

11. $\bar{a}_{45} + {}_{10|}\bar{a}_{30} - \bar{a}_{30:45}$

12. $\bar{a}_{25:\overline{25|}} + \bar{a}_{30:\overline{20|}} - \bar{a}_{(25:30):\overline{20|}}$

15. ${}_{20|}a_{30} + {}_{25|}a_{25} - {}_{25|}a_{25:30}$

16. ${}_{5|}\bar{a}_{55} + {}_{20|}\bar{a}_{40} - {}_{5|}\bar{a}_{(40:55):\overline{10|}} - {}_{20|}\bar{a}_{40:55}$

18. 51

21. 7.075349

23. $w = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y$

26. 1/3

27. $\bar{A}_{50} - \bar{A}^{1}_{(50:20):\overline{20|}}$

28. $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} - \bar{A}^{1}_{xy} + {}_nE_x \bar{A}^{1}_{(x+n):y}$

29. (1) 0.2755；
    (2) $\frac{1}{4}\bar{A}_{40:50} + 0.0015\bar{a}_{40:50}$

30. 1/12

31. $\frac{1}{3}$，52.68

习题八答案：

1. (1) $e^{-t\mu_x^{(\tau)}}\mu_x^{(j)}$，(2) $\frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}}$，(3) $e^{-t\mu_x^{(\tau)}}\mu_x^{(\tau)}$

2. 2/3

3. 400；500

4. (1) $j\ (50-t)^2/50^3$，(2) $3\ (50-t)^2/50^3$，(3) $j/3$，(4) $j/3$

5. $\frac{r_1}{r_1+r_2}$

6. (1) $\left(\frac{100-x-t}{100-x}\right)^{m/2}$,

(2) $\frac{j}{m+1}\cdot\frac{1}{100-x-t}\cdot\left(\frac{100-x-t}{100-x}\right)^{m/2}$,

(3) $\frac{m}{2}\cdot\frac{1}{100-x-t}\cdot\left(\frac{100-x-t}{100-x}\right)^{m/2}$,

(4) $\frac{6}{m\ (m+1)}$

7. 0.23

8. 0.226

9. $630e^{-x}-6.3x$

10. 750

11. (1) 0.75321, (2) 0.03766, (3) 0.16504

12. 0.036

13. $l_x^{(\tau)}=(a-x)\ e^{-x}$, $d_x^{(1)}=e^{-x}\ (1-e^{-1})$,

$d_x^{(2)}=(a-x-1)\ e^{-x}-(a-x-2)\ e^{-x-1}$

14. 0.1317

15. $1-e^{-c}$

16. 0.1421

17. 20.63

18. $1000\left[\frac{a-x^2}{a}\right]e^{-cx}$

19. (1) $-{}_tp_x^{(\tau)}\ [\mu_{x+t}^{(\tau)}-\mu_x^{(\tau)}]$, (2) ${}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}+{}_tq_x^{(j)}\mu_x^{(\tau)}-\mu_x^{(j)}$, (3) ${}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}$,

20. (1) $1-e^{-c}$, (2) c, (3) $c\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}dt$

21. 0.00995

22. 0.0592

23. (1) 0.0909, (2) 0.0906

24.

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$
62	0.01767	0.02665	0.19520
63	0.02054	0.03193	0.09726
64	0.02578	0.03705	0.11603

25.

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$
62	0.27288	0.02680	0.19554
63	0.02057	0.03200	0.09737
64	0.02585	0.03716	0.11622

26.

x	$m_x^{(1)}$	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$
65	0.02073	0.05181	0.02073	0.05183
66	0.03141	0.06283	0.03144	0.06286
67	0.04233	0.07407	0.04237	0.07412
68	0.06486	0.09730	0.06499	0.09744

27. 0.09405

28. 0.150

29. 7951

30. 0.94434

31. 0.015

32. 1

33. 13044

34. $\frac{S}{7}$

35. 8620 元

37. (1) 提示：先由 $q_x^{(3)} = q_x'^{(3)}\left[1-\frac{1}{2}(q_x'^{(1)}+q_x'^{(2)})+\frac{1}{3}q_x'^{(1)}q_x'^{(2)}\right]$ 求出 $q_x^{(3)}$

(2) 提示：$q_x^{(1)} \approx q_x'^{(1)}\left[1-\frac{1}{2}\ (q_x^{(2)}+q_x^{(3)})\right]$

38. (1) $q_x^{(j)} \approx \dfrac{m_x^{(j)}}{1+\frac{1}{2}m_x^{(\tau)}}$

习题九答案：

1. 取 $S_{30}=1$，则

$$S_{30+k}=\begin{cases}1.05^k & (0\leqslant k<10)\\ 1.1\times 1.05^k & (10\leqslant k<20)\\ 1.1^2\times 1.05^k & (20\leqslant k<30)\\ 1.1^3\times 1.05^k & (k\geqslant 30)\end{cases}$$

(2) $1200\sum_{k=0}^{\omega-31} v^{k+1/2}\ {}_{k+1/2}p_{30}^{(\tau)}\ S_{30+k}$

2. $0.1\sum_{k=0}^{\omega-36} v^{k+1/2}\ {}_{k+1/2}p_{35}^{(\tau)}[25000(S_{35+k}/S_{35}) - 10000\times 1.05^{k}]$

3. 3438.29

4. 5555

5. 13931

6. 75312

7. 19869

8. 设 $12000\ ({}_3Z_{25+k}/S_{25}) < 15000\times 1.04^{k}$，$k\leqslant a$，那么

$R(25, 0, k) = 120k\ ({}_3Z_{25+k}/S_{25})$，$k\leqslant a$，

$R(25, 0, k) = k\ [180\ ({}_3Z_{25+k}/S_{25}) - 75\times 1.04^{k}]$，$k>a$，

$R(40, 0, 25) = 15000\ ({}_3\tilde{Z}_{65}/S_{40}) - 0.50I_{65}$

9. (1) 其中 ${}_3\tilde{Z}_{65} = \frac{1}{3}\ (S_{62}+S_{63}+S_{64})$，

(2) $R(40, 0, 28.5) = 17100\ ({}_3\tilde{Z}_{65}/S_{40}) - 0.50I_{68.5}$

10. $5940v^{23}\ {}_{23}p_{40}^{(\tau)}\ \bar{a}_{63}^{r}$ 和 $3960v^{23}\ {}_{23}p_{40}^{(\tau)}\ \bar{a}_{63:\overline{2}|}^{r}$

11. $\sum_{k=0}^{17} v^{k+1/2}\ {}_kp_{50}^{(\tau)}\ q_{50+k}^{(r)}(20+k+1/2)({}_3Z_{50+k}/S_{50})\times 480\times \bar{a}_{50+k+1/2}^{r}$

$+\sum_{k=5}^{14} v^{k+1/2}\ {}_kp_{50}^{(\tau)}\ q_{50+k}^{(r)}(20+k+1/2)({}_3Z_{50+k}/S_{50})\times 240\times \bar{a}_{50+k+1/2:\overline{15-k-1/2}|}^{r}$

12. 第一个和式的最后三项变为

$\sum_{k=15}^{17} v^{k+1/2}\ {}_kp_{50}^{(\tau)}\ q_{50+k}^{(r)}({}_3Z_{50+k}/S_{50})\times 16800\times \bar{a}_{50+k+1/2}^{r}$

13. $\sum_{k=0}^{17} v^{k+1/2}\ {}_kp_{50}^{(\tau)}\ q_{50+k}^{(r)}\times 20\times ({}_3Z_{50+k}/S_{50})\times 480\times \bar{a}_{50+k+1/2}^{r}$

$+\sum_{k=5}^{14} v^{k+1/2}\ {}_kp_{50}^{(\tau)}\ q_{50+k}^{(r)}\times 20\times ({}_3Z_{50+k}/S_{50})\times 240\times \bar{a}_{50+k+1/2:\overline{15-k-1/2}|}^{r}$

14. (1) $R(30,20,15) = 8000 + 720\sum_{k=0}^{14} S_{50+k}/S_{50}$，

(2) $R(30,20,15.5) = 8000 + 720\left[\sum_{k=0}^{14} S_{50+k} + \frac{1}{2}S_{65}\right]/S_{50}$，

(3) $8000\sum_{k=8}^{17} v^{k+1/2}\ {}_kp_{50}^{(\tau)}\ q_{50+k}^{(\tau)}\ \bar{a}_{50+k+1/2}^{r}$，

(4) $\sum_{k=0}^{17} v^{k+1/2}\ {}_kp_{50}^{(\tau)}\ q_{50+k}^{(r)}\times 720\times \left[\left(\sum_{j=0}^{k-1} S_{50+j} + \frac{1}{2}S_{50+k}\right)/S_{50}\right]\bar{a}_{50+k+1/2}^{r}$

15. 1031.67

16. $(0.7\times 25000 - 8000)\ \bar{a}_{50.5}^{j} = 9500\bar{a}_{50.5}^{j}$

17. $5000\sum_{k=0}^{4} v^{k+1/2}\ {}_kp_{35}^{(\tau)}\ q_{35+k}^{(w)}(1.06)^{k+1/2}$

18. 2634.58

19. (1) $5000\times 1.05^{64-x}\ddot{a}_{510.05}$，(2) $1500\ (65-x)\ \times 1.05^{64-x}$，(3) 22

20. (1) 280.094，(2) 13396，(3) 149349

21. (1) $0.01c(AS)_{x+h}\int_0^1 v^t {}_tp_{x+h}^{(\tau)}\mu_{x+h+t}^{(w)}\int_0^1(1+j)^{t-s}dsdt$,

(2) $0.01c(AS)_{x+h}q_{x+h}^{(w)}\frac{1}{\ln(1+j)}\left[\frac{1-(1+j)/(1+i)}{\ln(1+i)-\ln(1+j)}-\frac{1-1/(1+i)}{\ln(1+i)}\right]$,

(3) 0.485642，0.487303，两者乘以$0.01c(AS)_{x+h}q_{x+h}^{(w)}$

22. 37.188

参考文献

1. Bowers Gerber Hickman Jones Nesbitt："Actuarial Mathematics"，*the Society of Actuaries*，1986.

2. N.L. 鲍尔斯等著；余跃年、郑蕴瑜译：《精算数学》，上海科技出版社 1996 年版。

3. 卢仿先、曾庆五编著：《寿险精算数学》，南开大学出版社 2001 年版。







中国精算师资格考试用书

- 利息理论 …………………… 主编 刘占国
- 寿险精算数学 …………………… 主编 卢仿先 张 琳
- 生命表基础 …………………… 主编 李晓林 孙佳美
- 风险理论 …………………… 主编 吴 岚 王 燕
- 寿险精算实务 …………………… 主编 李秀芳

责任编辑／张 铮
封面设计／颜 黎



ISBN 7-5005-9421-6 ／ F・8175 定价：39.00元